Programme de colle semaine 28 - du 05/05 au 09/05

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Énoncé d'un DL usuel parmi en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, Arctan, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Les trois premiers termes non nuls.
- DL de tan à l'ordre 3, avec preuve.

Chapitre 20. Espaces vectoriels.

Ensemble du chapitre, avec travail dans $\mathbb{K}[X]$ possible.

Chapitre 23. Espaces vectoriels de dimension finie.

Ensemble du chapitre.

Chapitre 24. Applications linéaires en dimension finie.

Ensemble du chapitre.

Chapitre 25. Analyse asymptotique.

Notations o et O (les équivalents $\sim$ ont été vus au premier semestre).

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Obtention d'un équivalent à partir d'un DL dont la partie polynomiale est non nulle.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.

Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient, composées, sur des exemples.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \longmapsto f(a+h)$.

Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, Arctan, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan, à savoir retrouver rapidement en primitivant $\tan'(x)$.

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Chapitre 26. Ensembles finis et dénombrement.

I) Ensembles finis

Définition. Un ensemble est dit fini lorsqu'il est vide ou en bijection avec un ensemble $[\![1\,; n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Cardinal d'un ensemble fini. Notations $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A})$, $|\mathrm{A}|$, $\#\mathrm{A}$.

Proposition. Si $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ est une application bijective avec E fini, alors F est fini de même cardinal.

▲ L'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme, mais c'est parfois utile de préciser celles-ci.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Proposition. Soit $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.
Si E est fini et f est surjective, alors F est fini et $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) \geqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$.
Si F est fini et f est injective, alors E est fini et $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$.
Si E et F sont finis de même cardinal, alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Application du premier point au principe des tiroirs.

Proposition. Principe des tiroirs.
Si E et F sont finis avec $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) > \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$, et $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$, alors f est non injective.

Proposition. Principe des tiroirs généralisé.
Si E et F sont finis avec $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) = p$, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{F}) = n$, $p > kn$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$,
alors il existe $y \in \mathrm{F}$ qui admet au moins $(k+1)$ antécédents, c'est-à-dire $\mathrm{Card}\,\left(f^{-1}(y)\right) \geqslant k+1$.

II) Cardinaux, dénombrement

1) Opérations sur les cardinaux

Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, complémentaire, produit cartésien. Union disjointe d'un nombre fini d'ensembles finis.

▲ La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments d'un ensemble de cardinal n ; c'est n^p.

2) Arrangements et injections

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, c'est $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Un arrangement de p éléments de F est une p-liste d'éléments de F deux à deux distincts, ie $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{F}$ tels que $\forall (i,j) \in [\![1\,; p]\!]^2$, $x_i \neq x_j$.

3) Permutations et bijections

Proposition. Si E et F sont des ensembles finis de même cardinal n, alors le nombre de bijections de E dans F est $\mathrm{A}_n^n = n!$.

Une permutation d'un ensemble E de cardinal n est un arrangement de n éléments de E, ie une bijection de E dans E.

Nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ; c'est $n!$.

C'est aussi le nombre de façons d'ordonner E.

4) Parties d'un ensemble et combinaisons

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble fini de cardinal n.

Exemples.

Nombre d'anagrammes d'un mot.

Nombre de façons de choisir, parmi n joueurs disponibles, une équipe de k joueurs, dont p titulaires.

Exemples de techniques de double comptage.

Démonstrations combinatoires des formules de Pascal et du binôme.

▲ Les étudiants doivent savoir distinguer les situations et utiliser les outils correspondants. Situations additives, multiplicatives, identiques, injectives, avec ordre, sans ordre...