

Programme de colle semaine 26 - du 07/04 au 11/04

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Énoncer le théorème de la base incomplète, de la base extraite en dimension finie.
- Énoncer la formule de Grassman.
- Savoir remplir la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases données.
- Énoncer le théorème du rang.

Chapitre 20. Espaces vectoriels.

Ensemble du chapitre, avec travail dans $\mathbb{K}[X]$ possible.

Chapitre 23. Espaces vectoriels de dimension finie.

I) Compléments sur familles libres, génératrices, bases (rappels).

Coordonnées dans une base.

II) Espaces vectoriels de dimension finie

Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite.

Si $\dim(E) = n$, les familles libres ont au plus n éléments, les familles génératrices de E ont au moins n éléments. Une famille comportant n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice de E .

Rang d'une famille finie $\mathcal{F}$. $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \text{Card}(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{Card}(\mathcal{F})$ (maximal).

III) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.

Tout sous-espace de E de dimension finie est de dimension finie inférieure.

$F = E$ si et seulement si F est un sous-espace vectoriel de E de même dimension.

Base adaptée à une inclusion, à une décomposition en supplémentaires.

Formule de Grassman.

Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Chapitre 24. Applications linéaires en dimension finie.

I) Applications linéaires et matrices

Cadre : dimension finie.

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et à E_2 . Exemples de projection et de symétrie.

Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.

Réciproquement, application linéaire associée à une matrice dans un couple de bases.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée.

Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Matrice de passage d'une base à une autre.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

II) Applications linéaires et rang

Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité d'une application linéaire par les bases.

Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.

Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base.

Application à la dimension de l'espace des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux.

Théorème du rang (version générale).

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si G est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , alors u induit un isomorphisme $\tilde{u} : G \longrightarrow \text{Im}(u)$.

Théorème du rang (version dimension finie).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Im}(u)$ est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u))$.

Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Applications linéaires $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\text{rg}(u) \leq \dim(E)$, avec égalité si et seulement si u est injective.

Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\text{rg}(u) \leq \dim(F)$, avec égalité si et seulement si u est surjective.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Si u ou v est de rang fini, alors $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$

Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Rappel de la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Interprétation matricielle, vectorielle, avec une application linéaire.

III) Noyau, image et rang d'une matrice

Rappel : application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Image et noyau d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation en termes de systèmes linéaires.

Rang d'une matrice A . Le rang d'une matrice est défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire canoniquement associée à A .

Théorème du rang.

Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.

Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.

Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r , il existe P et Q inversibles telles que $A = Q^{-1}J_rP$,

$$\text{où } J_r \text{ est décrite par blocs : } J_r = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_r & & & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & & & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang de la transposée. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice.

IV) Projections ou projecteurs, symétries

Cadre : dans un espace vectoriel non nécessairement de dimension finie.

Cas particulier de la dimension finie, matrices dans des bases adaptées.