Programme de colle semaine 23 - du 17/03 au 21/03

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Savoir montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, soit avec la caractérisation, soit en le décrivant comme un Vect, soit en le décrivant comme un noyau d'une application linéaire.
  Savoir repérer dans quel espace ambiant classique on travaille lorsque celui-ci n'est pas donné dans l'énoncé ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$, $\mathbb{R}^\mathrm{I}$, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$,...)
- Énoncer la définition d'une application linéaire. Savoir montrer la linéarité d'une application sur un exemple.
- Énoncer la définition d'une famille (finie) libre $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Savoir montrer la liberté sur un exemple.
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
- Appliquer l'algorithme d'Euclide sur un exemple.
- Énoncer la proposition de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$;
  puis montrer que $\mathrm{P}(a) = 0 \iff (\mathrm{X} - a)|\mathrm{P}$.
- Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes, puis montrer que pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$, $(\mathrm{X} - a)^2|\mathrm{P} \iff \mathrm{P}(a) = 0$ et $\mathrm{P}'(a) = 0$.
  Que signifient ces propriétés en terme de multiplicité de a comme racine de P ?
- Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Énoncer la définition et la caractérisation de « a est racine de P de multiplicité m ».
- Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $a_n \neq 0$.
  Combien P a-t-il de racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité ?

Chapitre 20. Espaces vectoriels.

Ensemble du chapitre, avec travail dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ possible.

V) Familles finies.

Familles libres, liées, génératrices, bases. Vecteurs linéairement indépendants.

Exemples de différentes techniques pour montrer la liberté d'une famille.

Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

▲ L'objectif principal de ce paragraphe est d'étudier la liberté d'une famille finie. Les coordonnées dans une base feront l'objet d'un chapitre ultérieur.

Chapitre 21. Divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Définition. Divisibilité dans $\mathbb{N}$, diviseurs, multiples. Soient $d, n \in \mathbb{N}$.
On dit que d divise n lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = kd$.
On note alors $d|n$.
On dit aussi que n est un multiple de d.

Théorème. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad \exists ! (q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0\,;\, b-1]\!] \quad a = bq + r$.
On appelle a le dividende, b le diviseur, q le quotient, r le reste.
On a $b|a$ si et seulement si $r = 0$.

Algorithme d'Euclide.

Propriété. $[d|a \text{ et } d|b] \Longleftrightarrow d|r_{n_0}$ le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

Définition. $\mathrm{pgcd}(a,b)$ Le pgcd de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel $\leqslant$ dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

Propriété. $\mathrm{pgcd}(a,b) = r_{n_0}$ le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

Définition. $\mathrm{ppcm}(a,b)$ est le plus petit multiple non nul commun à a et à b.
Il appartient donc à $[\![1\,;\, ab]\!]$.

Propriété. $[a|n \text{ et } b|n] \Longleftrightarrow \mathrm{ppcm}\,(a,b)|n$

Propriété. $\mathrm{pgcd}(a,b)\times\ \mathrm{ppcm}(a,b) = ab$.

Nombre premier.
L'ensemble des nombres premiers est infini.
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.
Application au calcul du pgcd et du ppcm.

▲ Les points suivants sont hors programme en filière PTSI. La relation de Bézout, les entiers premiers entre eux, le lemme de Gauss, le vocabulaire valuation p-adique, les congruences, l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Chapitre 22. Polynômes.

I) L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$
Construction possible comme les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ s'annulant à partir d'un certain rang, ie comportant un nombre fini de termes non nuls.
Pour P non nul, on écrit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$, et $\mathrm{X} = (0,1,0,0,0,\dots)$; $\mathrm{X}^k = (0,\dots,0,1,0,0,0,\dots)$ où le 1 est à la k-ième place (en numérotant à partir de zéro).
Le degré de P est n.

Par convention, on pose $\deg(0) = -\infty$, mais pour rédiger en parlant du degré, on traitera souvent à part le cas du polynôme nul (notamment les propositions donnant le comportement du degré vis-vis des opérations)

Le coefficient dominant est a_n.

Le terme de plus haut degré, ou terme dominant, est $a_n X^n$.

P est dit unitaire lorsque $a_n = 1$, ie $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.

Opérations. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

Combinaison linéaire $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda a_k + b_k) X^k$.

On a $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si et seulement si $\deg(P) \neq \deg(P)$ ou $a_n \neq -b_n$, ie tous les cas hors ceux où la somme des termes dominant s'annule, $(a_n + b_n)X^n = 0$.

Produit $PQ = R = \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell X^\ell$ avec $c_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}$.

On a $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$.

Composition $Q \circ P = Q(P) = \sum_{k=0}^{m} b_k P^k$ où $P^0 = 1$ et P^k est le produit $P \times P \times \cdots P$, k fois, défini par récurrence sur k.

On a $\deg(Q(P)) = nm = \deg(P) \times \deg(Q)$.

On a $Q(X) = Q$ et le produit est cohérent avec la notation X^k.

Évaluation d'un polynôme.

Dans $\mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$, où $M^0 = I_p$.

Dans $\mathscr{L}(E)$. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$, où $f^0 = \mathrm{id}_E$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, …, $f^{k+1} = f \circ f^k$ est défini par récurrence sur k.
La multiplication des polynômes est envoyée sur la composition des endomorphismes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathbb{K}_n[X]$ en est un sous-espace vectoriel.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, la fonction $\widetilde{P}\colon \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$, encore notée P, est la fonction polynomiale associée à P. Ce n'est pas une application linéaire en général (comparer avec l'évaluation ci-dessous).

Les évaluations sont des applications linéaires, ie

Pour $x \in \mathbb{K}$ fixé, $\varphi_x \colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$ est une forme linéaire,

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ fixée, $\varphi_{\mathrm{M}} \colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{M}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{M}^k \end{cases}$ est linéaire,

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ fixé, $\varphi_f \colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k \end{cases}$ est linéaire.

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ fixé, la composition à gauche $\mathrm{P} \colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{Q}(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} \circ \mathrm{P} \end{cases}$ est linéaire.

▲ Pas encore d'étude de liberté de familles $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ de polynômes de degrés distincts.

II) Dérivation dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

Dérivation dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, on pose $\mathrm{P}' = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k \mathrm{X}^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)\mathrm{X}^k$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, la fonction dérivée de la fonction polynomiale associée à P est la fonction polynomiale associée au polynôme dérivé de P, ie $\left(\widetilde{\mathrm{P}}\right)' = \widetilde{(\mathrm{P}')}$,
ie la dérivée de $x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ est $x \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}$.

La dérivation est linéaire, ie $\mathrm{D} \colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}' \end{cases}$ est linéaire.

Pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on a $(\mathrm{PQ})' = \mathrm{P}'\mathrm{Q} + \mathrm{P}\mathrm{Q}'$, ainsi que la formule de Leibniz qui en découle.
La dérivée k^{e} d'un polynôme peut-être définie par récurrence. On pose $\mathrm{P}^{(0)} = \mathrm{P}$, et $\mathrm{P}^{(k+1)} = \left(\mathrm{P}^{(k)}\right)'$.
On obtient, pour $\mathrm{P} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$, $\mathrm{P}^{(k)} = \sum\limits_{i=k}^{n} a_i \dfrac{i!}{(i-k)!} \mathrm{X}^{i-k}$ si $k \leqslant n$, et $\mathrm{P}^{(k)} = 0$ si $k \geqslant n+1$.
Formule de Leibniz.
Formule de Taylor. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$, on a $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!} (\mathrm{X} - a)^k$.

III) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
Définition et théorème (division euclidienne dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$).
Pour tous polynômes A et B avec $\mathrm{B} \neq 0$,
il existe un unique couple (Q, R) tel que $\mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R}$ et $\deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B})$.

Méthodes pratiques pour obtenir le quotient et le reste (cas général, ou en les cherchant d'un certain degré lorsque celui-ci est petit).
Exemples de méthodes pour obtenir seulement le reste.

Pour $\mathrm{B} \neq 0$, on a $\mathrm{B}|\mathrm{A}$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV) Racines (ou zéros) d'un polynôme.
Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$, on dit que a est racine de P lorsque $\mathrm{P}(a) = 0$.
Caractérisation par la divisibilité. a est racine de P si et seulement si $(\mathrm{X} - a)|\mathrm{P}$.
Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.

Multiplicité d'une racine. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que a est racine de P de multiplicité (ou d'ordre) m lorsque $(X-a)^m | P$ et $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.

Vocabulaire racine simple, double, ...

Caractérisation par les dérivées successives. a est racine de P de multiplicité m si et seulement si $\forall k \in [\![0\,;\, m-1]\!] \quad P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Conséquence. La seule condition $\forall k \in [\![0\,;\, m-1]\!] \quad P^{(k)}(a) = 0$ est équivalente à $(X-a)^m | P$, c'est-à-dire lorsque a est racine de P d'ordre supérieur ou égal à m.

Le nombre de racines comptées avec multiplicité d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.

Définition d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, d'un polynôme scindé à racines simples.

Proposition. Un polynôme de degré n qui admet $(n+1)$ racines est le polynôme nul.

Un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.

Identification des fonctions polynomiales.

V) Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Lemme 1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

Lemme 2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, si a est une racine complexe non réelle de P de multiplicité m, alors $\overline{a}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité m.

Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On l'obtient à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les facteurs correspondants à 2 racines complexes conjuguées non réelles.

▲ Pas cette semaine : VI) Somme et produit des racines d'un polynôme VII) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles.