Programme de colle semaine 22 - du 10/03 au 14/03

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Savoir montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, soit avec la caractérisation, soit en le décrivant comme un Vect, soit en le décrivant comme un noyau d'une application linéaire. Savoir repérer dans quel espace ambiant classique on travaille lorsque celui-ci n'est pas donné dans l'énoncé ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$, $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$...)
- Énoncer la définition d'une application linéaire. Savoir montrer la linéarité d'une application sur un exemple.
- Énoncer la définition d'une famille (finie) libre $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Savoir montrer la liberté sur un exemple.
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
- Appliquer l'algorithme d'Euclide sur un exemple.

Chapitre 20. Espaces vectoriels.

Ensemble du chapitre.
I) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
II) Sous-espaces vectoriels
III) Applications linéaires
Applications linéaires. Une application $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ est dite linéaire lorsque

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Dans ce cas, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Notation $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. C'est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de F^{E}.

Exemples.
Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
L'identité id_{E}, les homothéties $\lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
La transposition dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La dérivation sur les fonctions dérivables.
Pour $a \in \mathrm{I}$, la prise de la primitive s'annulant en a ; $f \longmapsto \left[x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$.
L'intégrale sur les fonctions continues sur I est linéaire. Pour $a, b \in \mathrm{I}$, $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
L'évaluation d'une fonction en a.
La prise de la limite d'une suite convergente.
$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX}$, où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, entre les bons espaces.

$y \longmapsto y' + a(x)y$ entre les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et les fonctions continues.

Vocabulaire.

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E. Notation $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Notation GL(E).

Proposition. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$, ie est linéaire.

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, l'application φ: $\begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G}) \\ g \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

Pour $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, l'application ψ: $\begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G}) \\ f \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Conséquence. On dispose des propriétés signifiant que GL(E) est un groupe, non abélien en général.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

En particulier, l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Noyau, notation $\ker(f)$ ou $\mathrm{Ker}\,(f)$. C'est un sous-espace vectoriel.

Conséquence. On peut montrer que F est un sous-espace vectoriel en le décrivant comme un noyau, ou une intersection de noyaux. Cela ne dispense pas de montrer la linéarité des application linéaires invoquées.

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \{0_\mathrm{E}\}$,
c'est-à-dire lorsque $\forall x \in \mathrm{E} \quad f(x) = 0_\mathrm{F} \Longrightarrow x = 0_\mathrm{E}$.

IV) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Somme directe. Caractérisation par l'intersection.

Sous-espaces supplémentaires.

Exemples.

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (fait en exemple de cours dans le chapitre sur les matrices. Raisonnement par analyse-synthèse.)

Les fonctions paires et les fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^\mathrm{I}$ (où I est symétrique par rapport à 0). (fait au Chapitre 6).

Pour $a \in \mathrm{I}$, les fonctions s'annulant en a et les fonctions constantes $\mathrm{Vect}\,(1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^\mathrm{I}$.

V) Familles finies.

Familles libres, liées, génératrices, bases. Vecteurs linéairement indépendants.

Exemples de différentes techniques pour montrer la liberté d'une famille.

Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

▲ L'objectif principal de ce paragraphe est d'étudier la liberté d'une famille finie. Les coordonnées dans une base feront l'objet d'un chapitre ultérieur.

Chapitre 21. Divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Définition. Divisibilité dans $\mathbb{N}$, diviseurs, multiples. Soient $d, n \in \mathbb{N}$.
On dit que d divise n lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = kd$.
On note alors $d|n$.
On dit aussi que n est un multiple de d.

Théorème. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad \exists !(q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0\,;\, b-1]\!] \quad a = bq + r$.
On appelle a le dividende, b le diviseur, q le quotient, r le reste.
On a $b|a$ si et seulement si $r = 0$.

Algorithme d'Euclide.

Propriété. $[d|a \text{ et } \ d|b] \iff d|r_{n_0}$ le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

Définition. $\text{pgcd}(a,b)$ Le pgcd de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel $\leqslant$ dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

Propriété. $\text{pgcd}(a,b) = r_{n_0}$ le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

Définition. $\text{ppcm}(a,b)$ est le plus petit multiple non nul commun à a et à b.
Il appartient donc à $[\![1\,;\, ab]\!]$.

Propriété. $[a|n \text{ et } \ b|n] \iff \text{ppcm}\,(a,b)|n$

Propriété. $\text{pgcd}(a,b) \times \text{ppcm}(a,b) = ab$.

Nombre premier.
L'ensemble des nombres premiers est infini.
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.
Application au calcul du pgcd et du ppcm.

▲ Les points suivants sont hors programme en filière PTSI. La relation de Bézout, les entiers premiers entre eux, le lemme de Gauss, le vocabulaire valuation p-adique, les congruences, l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.