Programme de colle semaine 17 - du 20/01 au 24/01

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Énoncer un équivalent usuel, en faire des produits et quotients, les appliquer aux suites.
  - $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$
  - $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha\, x \quad$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

  Le dernier équivalent s'écrit, pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ puis $\alpha = -\dfrac{1}{2}$,
  - $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$
  - $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{2}$
  - $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$

  qui découle de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$
  - $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

  Tout équivalent usuel non su entraine une note inférieure à 5.
- Énoncer la définition d'un produit de matrices, cas général.
- Savoir calculer un produit de matrices sur un exemple en « petite » taille.
- Calcul d'inverse ou résolution de système linéaire avec le pivot de Gauss sur un exemple.
- Énoncer la formule du binôme pour les matrices en précisant les hypothèses. Que vaut A^0 ?
- Énoncer le théorème de convergence par encadrement pour les suites et les théorèmes de divergence par majoration ou minoration.
- Énoncer le théorème de convergence monotone pour les suites. Que dire de l'éventuelle limite d'une suite décroissante ?
- Définir ce que sont des suites adjacentes et énoncer le théorème correspondant.

Chapitre 16. Calcul matriciel.

1) Ensembles de matrices : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Opérations sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: combinaisons linéaires.

Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K});+)$ est un groupe abélien, que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K});+;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3) Produit de matrices

Définitions, exemples. Attention à la compatibilité des tailles. AB et BA n'ont pas la même taille en général. On peut avoir $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$. On peut avoir $\mathrm{AB} = 0$ avec $\mathrm{A} \neq 0$ et $\mathrm{B} \neq 0$.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

La j^{e} colonne de AB est le produit de A par la j^{e} colonne de B.

La i^{e} ligne de AB est le produit de la i^{e} ligne de A par B.

Propriétés. $\mathrm{A} \times 0 = 0$; $0 \times \mathrm{A} = 0$; associativité et bilinéarité du produit.

4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent.

Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K});+;\times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$.

▲ Le vocabulaire des groupes et anneaux n'est pas au programme.
Celui des espaces vectoriels sera revu dans le chapitre correspondant.
On s'intéresse ici plus à l'utilisation des matrices qu'à la structure algébrique.

5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition : A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche (admis).

Unicité de l'inverse si existence.

Propriété $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$. Ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n, appelé groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{K}$. Propriétés signifiant que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K});\times)$ est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de $\mathrm{A}^2 - 8\mathrm{A} + \mathrm{I}_2 = 0$.

▲ La formule pour des matrices carré d'ordre 2 est hors-programme. Il est cependant autorisé, même si on doit savoir aussi rédiger par pivot de Gauss,
pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de poser, lorsque $ad - bc \neq 0$, $\mathrm{B} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ puis de vérifier $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_2$.

6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations $+$, $\cdot$, $\times$ des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

7) Systèmes linéaires.

Écriture matricielle, vocabulaire, résolution sur des exemples avec l'algorithme du pivot de Gauss.

Application au calcul d'inverses de matrices.

Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

8) Transposition

Définition de $\mathrm{A}^\top$, ou ${}^t\mathrm{A}$ (ancienne notation), pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Propriétés. $(\lambda\mathrm{A}+\mathrm{B})^\top = \lambda\mathrm{A}^\top+\mathrm{B}^\top$; $(\mathrm{AB})^\top = \mathrm{B}^\top\mathrm{A}^\top$ lorsque compatible ; $\left(\mathrm{A}^\top\right)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ lorsque A est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.

Révisions.

Révisions de l'analyse, notamment des équivalents usuels qui peuvent être appliqués aux suites.

Chapitre 17. Suites.

1) Modes de définition.
Explicitement, implicitement, par récurrence.
2) Limites
Suites convergentes, suites tendant vers $+\infty$, $-\infty$.
3) Suites extraites
Utilisation pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite.
Proposition. Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.
Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers a, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a.
4) Suite majorée minorée, bornée
Toute suite convergente est bornée.
5) Opérations et limites.
Somme, multiplication par un réel. [combinaison linéaire]
Produit, inverse, quotient.
Composition d'une suite tendant vers a par une fonction admettant une limite en a.
6) Inégalités et limites.
Passage à la limite dans une inégalité large. Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.
7) Monotonie.
Caractérisation pour les suites. Théorème de la limite monotone : convergence ou limite infinie.
8) Suites adjacentes.
Définition et théorème.

9) Compléments sur borne inférieure et supérieure.
Caractérisation de sup(A) parmi les majorants comme limite d'une suite d'éléments de A.

10) Équivalents usuels.
Rappels d'application de ceux des fonctions, comme $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
▲ La formule de Stirling est hors-programme.

11) Suites à valeurs complexes.
Convergence d'une suite complexe. Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire. Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.

Exemples.
Convergence et limite de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$; divergence vers $+\infty$ de $(|q^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $|q| > 1$; cas $q = 1$ et $q = -1$.

Convergence de $\left(\dfrac{z^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0, où $z \in \mathbb{C}$.

▲ Pas cette semaine :

Suites arithmético-géométriques.
Suites récurrentes linéaires d'ordre deux.
Pas d'étude technique de suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.