Programme de colle semaine 16 - du 13/01 au 17/01

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Énoncer un équivalent usuel, en faire des produits et quotients.
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\frac{1}{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Le dernier équivalent s'écrit, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ puis $\alpha = -\frac{1}{2}$,

- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$
 - $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x}{2}$
 - $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$
 - $\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
- qui découle de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{-1}{2}$

Tout équivalent usuel non su entraîne une note inférieure à 5.

- Énoncer la définition d'un produit de matrices, cas général.
- Savoir calculer un produit de matrices sur un exemple en « petite » taille.
- Calcul d'inverse ou résolution de système linéaire avec le pivot de Gauss sur un exemple.

Chapitre 15. Continuité.

Ensemble du chapitre, notamment les équivalents.

II) Équivalents de fonctions : relation $\sim$.

Propriétés usuelles découlant des limites : constantes non nulles, produit, quotient, puissance α .

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Équivalents usuels.

Application au calcul de limites et étude de signes.

Méthode pour étudier une branche infinie de fonction qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$.
Vocabulaire branche parabolique d'une direction donnée, droite asymptote (oblique).

III) Continuité sur un intervalle (étude « globale »)

Définition. Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composée $g \circ f$ de f continue sur I et de g continue sur $f(I)$.

Théorème des valeurs intermédiaires : énoncé et corollaire équivalent : l'image par f continue de I intervalle est un intervalle.

Théorème des bornes atteintes (admis) : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue sur celui-ci est un segment. Les autres formes d'intervalles ne sont pas conservées en général.

Chapitre 16. Calcul matriciel.

1) Ensembles de matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: combinaisons linéaires.

Propriétés signifiant que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$ est un groupe abélien, que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

3) Produit de matrices

Définitions, exemples. Attention à la compatibilité des tailles. AB et BA n'ont pas la même taille en général. On peut avoir $AB \neq BA$. On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .

La j^{e} colonne de AB est le produit de A par la j^{e} colonne de B .

La i^{e} ligne de AB est le produit de la i^{e} ligne de A par B .

Propriétés. $A \times 0 = 0$; $0 \times A = 0$; associativité et bilinéarité du produit.

4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent.

Propriétés signifiant que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}); +; \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geq 2$.

▲ Le vocabulaire des groupes et anneaux n'est pas au programme.

Celui des espaces vectoriels sera revu dans le chapitre correspondant.

On s'intéresse ici plus à l'utilisation des matrices qu'à la structure algébrique.

5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition : A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche (admis).

Unicité de l'inverse si existence.

Propriété $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n , appelé groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{K}$. Propriétés signifiant que $(GL_n(\mathbb{K}); \times)$ est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de $A^2 - 8A + I_2 = 0$.

▲ La formule pour des matrices carré d'ordre 2 est hors-programme. Il est cependant autorisé, même si on doit savoir aussi rédiger par pivot de Gauss,

pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de poser, lorsque $ad - bc \neq 0$, $B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ puis de vérifier $AB = I_2$.

6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations $+$, $\cdot$, $\times$ des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

7) Systèmes linéaires.

Écriture matricielle, vocabulaire, résolution sur des exemples avec l'algorithme du pivot de Gauss.

Application au calcul d'inverses de matrices.

Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

8) Transposition

Définition de $A^\top$, ou ${}^t A$ (ancienne notation), pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Propriétés. $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$; $(AB)^\top = B^\top A^\top$ lorsque compatible ; $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ lorsque A est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.