

Programme de colle semaine 14 - du 16/12 au 20/12

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Énoncer la définition d'une limite avec des quantificateurs : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ (9 cas).
- Énoncer la propriété de passage à la limite dans une inégalité large.
- Énoncer les théorèmes de limite par encadrement, par minoration, par majoration.
- Énoncé le théorème de la limite monotone.

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors

- f admet une limite à gauche en b , qui est finie si f est majorée et qui vaut $+\infty$ sinon.
- f admet une limite à droite en a , qui est finie si f est minorée et qui vaut $-\infty$ sinon.
- en tout point $x \in]a; b[$, f admet une limite à droite et une limite à gauche. Ces limites sont finies. En notant $f(x_+) = \lim_{x \rightarrow x^+} f(x)$ et $f(x_-) = \lim_{x \rightarrow x^-} f(x)$, on a

$$f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$$

- Énoncer un équivalent usuel, en faire des produits et quotients.

- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

- $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

- $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

- $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

- $\frac{1}{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$

- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Le dernier équivalent s'écrit, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ puis $\alpha = -\frac{1}{2}$,

- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$

- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x}{2}$

- $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$

qui découle de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{-1}{2}$

- $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

Tout équivalent usuel non su entraîne une note inférieure à 5.

Savoir faire :

- Appliquer la méthode de résolution d'une EDL2 à coefficients constants sur un exemple, où le second membre est de la forme adaptée aux situations au programme.

Chapitre 13. EDL2 à coefficients constants.

- 1) Vocabulaire. Définition. Solution. Équation homogène associée.
- 2) Résolution de (E_0) . Équation caractéristique. Solutions à valeurs complexes. Solutions à valeurs réelles lorsque l'EDL2 est à coefficients réels.
- 3) Forme générale des solutions d'une EDL2 à coefficients constants avec second membre.
- 4) Recherche d'une solution particulière.
Principe de superposition des solutions.
Cas des seconds membres de la forme $e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. En conséquence, tous les seconds membres qui s'écrivent comme combinaison linéaire de $e^{\lambda x}$. Seconds membres polynomiaux (solution particulière polynomiale de même degré, lorsque 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique).
- Pour une EDL2 à coefficients réels, on peut trouver une solution particulière associée à un second membre égal à $\cos(x)$ en prenant la partie réelle d'une solution particulière associée à e^{ix} , plutôt que de faire l'autre calcul avec e^{-ix} (et généralisation avec d'autres seconds membres).

▲ Aucune règle n'est à connaître pour les seconds membres de la forme $P(x)e^{\lambda x}$ et leurs variantes.

- 5) Problème de Cauchy. Définition. Existence et unicité de la solution (admis dans le cas général), méthode pour la trouver en résolvant un système 2-2 (2 équations, 2 inconnues).

Chapitre 14. Nombres réels (2).

- Bornes supérieure et inférieure, partie entière, approximation décimale d'un réel.
- Pour $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée, la plus petit des majorants $\text{Sup}(A)$ existe. $s = \text{Sup}(A)$ est caractérisé par $\begin{cases} \forall x \in A & x \leq s \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A & s < x < s + \varepsilon \end{cases}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $[x] = E(x) = \max \{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x < p + 1\}$.
- Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [k; k + 1[$, $[x] = k$.
- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_n = [10^n x] 10^{-n}$ est la suite d'approximation décimale de x par défaut.
- La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $b_n = a_n + 10^{-n}$ est la suite d'approximation décimale de x par excès.

Chapitre 15. Continuité.

- I) Étude locale : limites.
Cadre : f est une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Propriété vraie au voisinage de a , pour $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.
- 1) Limites
Définitions : pour $a \in I$ ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a . Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ (9 cas).
Unicité de la limite.
Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .
Limite à droite, à gauche, pour une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.
- 2) Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a (somme, produit par un réel, produit, quotient). Composition. Limite d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a .
- 3) Inégalités et limites.

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$) et de majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

4) Continuité en a .

Continuité de f en un $a \in I$. Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues en a : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composition $g \circ f$ de f continue en a et de g continue en $f(a)$.

II) Équivalents de fonctions : relation $\sim$.

Propriétés usuelles découlant des limites : constantes non nulles, produit, quotient, puissance α .

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Équivalents usuels.

Application au calcul de limites et étude de signes.

Méthode pour étudier une branche infinie de fonction qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$.

Vocabulaire branche parabolique d'une direction donnée, droite asymptote (oblique).