Programme de colle semaine 13 - du 09/12 au 13/12

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans le programme des premières semaines, 6 et 7.

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile. C'est aussi vrai pour les questions de cours.

Exemples de questions de cours

- Énoncer ou recalculer une primitive usuelle.

  Savoir faire :
- Appliquer le théorème d'intégration par parties sur un exemple.
- Appliquer le théorème de changement de variable sur un exemple.
- Appliquer la méthode de résolution d'une EDL1 sur un exemple.
- Appliquer la méthode de résolution d'une EDL2 à coefficients constants sur un exemple, où le second membre est de la forme adaptée aux situation au programme.

Chapitre 11. Primitives.

1) Notion d'intégrale d'une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ à valeurs complexes (avec les parties réelle et imaginaire).

Linéarité, inégalité triangulaire, relation de Chasles. $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Positivité et croissance de l'intégrale de fonctions à valeurs réelles.

▲ Pas le théorème qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle (semestre 2).

Définition d'une primitive.

Théorème fondamental de l'analyse.

Si $f\ :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, la fonction

$$\mathrm{F} : \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est une primitive de f sur I. C'est celle qui s'annule en x_0.

Notation.

Une primitive quelconque d'une fonction continue f sur un intervalle I se note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ou encore $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition. Calcul d'intégrales.

Si $f\ :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors pour tous $a, b \in \mathrm{I}$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

où F est une primitive de f sur $[\,a\,;b\,]$.

Combinaisons linéaires de primitives.

2) Primitives usuelles.

$f(x)$	$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$	Intervalle
x^α où $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]\,0\,;+\infty\,[$ en général, $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $]\,-\infty\,;0\,[$ ou $]\,0\,;+\infty\,[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-1\}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$]\,-\infty\,;0\,[$ ou $]\,0\,;+\infty\,[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\left]\,k\pi - \dfrac{\pi}{2}\,;k\pi + \dfrac{\pi}{2}\,\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathrm{e}^{\lambda x}$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$]\,0\,;+\infty\,[$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,(x)$	$]\,-1\,;1\,[$

- Cas particuliers de $x \longmapsto x^\alpha$. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.
- Reconnaître des dérivées de fonctions composées, c'est-à-dire que $(v' \circ u)u' \;:\; x \longmapsto v'(u(x))u'(x)$

est la dérivée de $(v \circ u)\ :\ x \longmapsto v(u(x))$ pour v une fonction usuelle, sur un intervalle adapté.

- Utiliser une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ pour calculer une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Une double IPP est aussi possible.
- Technique pour calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$ sur des exemples.
  Trois cas avec $\dfrac{1}{a}$ en facteur, $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^2+\gamma^2}$, notamment $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{A}^2+x^2}$.

3) Théorème d'intégration par parties.
Version pour le calcul de primitives, version pour le calcul d'intégrales.
4) Théorème de changement de variable.
Version pour le calcul de primitives, version pour le calcul d'intégrales.

Chapitre 12. Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

I) Primitives.
Définitions. Description sur un intervalle. Combinaison linéaire.
Dérivation des fonctions usuelles de terminale sur un intervalle à préciser.
$x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, exp, ln, $\sqrt{\cdot}$, cos, sin.

Formules de dérivation usuelles et de terminales.
Pour u une fonction dérivable,
$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$
$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ pour u à valeurs strictement positives.
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ pour u à valeurs strictement positives.
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et sur un intervalle bien choisi.
La fonction dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$ est $x \longmapsto af'(ax+b)$, où f est dérivable, sur un intervalle bien choisi.
En particulier, la dérivée de $x \longmapsto \cos(5x)$ est $x \longmapsto -5\sin(5x)$.

II) Équations différentielles linéaires d'ordre 1.
1) Vocabulaire. Définition. Solution. Équation homogène associée.
2) Résolution de (E_0).
3) Forme générale des solutions d'une EDL1 avec second membre.
4) Recherche d'une solution particulière.
- Sous une forme donnée si celle-ci est suggérée par l'énoncé, ou si une solution évidente apparaît.
Principe de superposition des solutions.
- Méthode de variation de la constante ; chercher une solution particulière sous la forme $\varphi = \lambda z$ où λ est une fonction dérivable et z une solution de (E_0).
5) Problème de Cauchy. Définition, existence et unicité de la solution.

▲ Aucune autre règle que la méthode de la variation de la constante n'est à connaître pour les EDL1, même concernant les seconds membres de la forme $\mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ et leurs variantes.

▲ Des exemples d'équations non linéaires et de problème de Cauchy avec solution non unique ont été vus. Ce n'est pas un objectif du programme.

Exemples de changement de fonction inconnue, qui doivent être guidées.
▲ Éviter les problèmes de recollement, outils de continuité et dérivabilités manquants (en février).
▲ Pas encore de changement de variable dans une EDL1 ou 2.

Chapitre 13. EDL2 à coefficients constants.

1) Vocabulaire. Définition. Solution. Équation homogène associée.

2) Résolution de (E_0). Équation caractéristique. Solutions à valeurs complexes. Solutions à valeurs réelles lorsque l'EDL2 est à coefficients réels.

3) Forme générale des solutions d'une EDL2 à coefficients constants avec second membre.

4) Recherche d'une solution particulière.

Principe de superposition des solutions.

Cas des seconds membres de la forme $e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. En conséquence, tous les seconds membres qui s'écrivent comme combinaison linéaire de $e^{\lambda x}$. Seconds membres polynomiaux (solution particulière polynomiale de de même degré, lorsque 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique).

Pour une EDL2 à coefficients réels, on peut trouver une solution particulière associée à un second membre égal à $\cos(x)$ en prenant la partie réelle d'une solution particulière associée à e^{ix}, plutôt que de faire l'autre calcul avec e^{-ix} (et généralisation avec d'autres seconds membres).

▲ Aucune règle n'est à connaître pour les seconds membres de la forme $P(x)e^{\lambda x}$ et leurs variantes.

5) Problème de Cauchy. Définition. Existence et unicité de la solution (admis dans le cas général), méthode pour la trouver en résolvant un système 2-2 (2 équations, 2 inconnues).