Programme de colle semaines 31 et 32 - du 22/05 au 02/06

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 7 et 8.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2223/Prog_colle_semaine_07et08.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Chapitres 21, 23, 26. Algèbre linéaire.

Tout, notamment le chapitre 26 :

Chapitre 26. Applications linéaires en dimension finie.

I) Applications linéaires et matrices

Cadre : dimension finie.

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Une application linéaire définie sur $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et à E_2. Exemples de projection et de symétrie.

Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.

Réciproquement, application linéaire associée à une matrice dans un couple de bases.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée.

Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Matrice de passage d'une base à une autre.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

II) Applications linéaires et rang

Caractérisation des isomorphismes par les bases.

Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.

Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base.

Application à la dimension de l'espace des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux.

Théorème du rang : si E est de dimension finie et si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, alors $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie et $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}\,(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Applications linéaires $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ de rang fini.

Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\mathrm{rg}\,(u) \leqslant \dim(\mathrm{E})$, avec égalité si et seulement si u est injective.

Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\mathrm{rg}\,(u) \leqslant \dim(\mathrm{F})$, avec égalité si et seulement si u est surjective.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Si u ou v est de rang fini, alors $\mathrm{rg}\,(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,(u), \mathrm{rg}\,(v))$

Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Rappel de la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Interprétation matricielle, vectorielle, avec une application linéaire.

III) Noyau, image et rang d'une matrice

Rappel : application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Image et noyau d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation en termes de systèmes linéaires.

Rang d'une matrice A. Le rang d'une matrice est défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Théorème du rang.

Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.

Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.

Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Proposition. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, il existe P et Q inversibles telles que $\mathrm{A} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{J}_r\mathrm{P}$, où J_r est décrite par blocs : $\mathrm{J}_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Rang de la transposée. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice.

IV) Projections ou projecteurs, symétries

Cadre : dans un espace vectoriel non nécessairement de dimension finie.

Cas particulier de la dimension finie, matrices dans des bases adaptées.

Chapitre 27. Séries numériques.

I. Définitions

1) Rappels : suites et sommes géométriques.
2) Notion de série. Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles.
3) Convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.

II. Premières propriétés

1) Condition nécessaire de convergence

Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

2) Séries géométriques. Sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, somme et reste en cas de convergence.
3) Structure. Espaces vectoriels, linéarité de la somme.
4) Suites et séries télescopiques

III. Séries à termes positifs

1) Proposition.
2) Encadrement des sommes partielles par une intégrale : séries $\sum f(n)$, avec f monotone.

3) Séries de Riemann. Exemple d'application - exercice : trouver un équivalent d'une somme partielle S_n d'une série divergente ou du reste R_n d'une série de Riemann convergente.

4) **Théorème** *(de comparaison).*

5) **Théorème** *(sur équivalents).*

6) **Proposition - méthode.** Comparaison à une série de Riemann.

7) **Proposition - méthode.** Comparaison à une série géométrique.

▲ Les critères de D'Alembert et de Cauchy sont hors programme, mais on peut demander d'étudier les limites de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ou de $[u_n]^{\frac{1}{n}}$ en question intermédiaire, puis comparer à une série géométrique pour obtenir convergence ou divergence.

IV. Séries absolument convergentes

Définition. On dit qu'une série $\sum u_n$ converge absolument (CVA) lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge. La réciproque est fausse.

Proposition. Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Proposition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
On notera que l'hypothèse d'avoir $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs positives est nécessaire.