Programme de colle semaines 27 et 28 - du 24/04 au 05/05

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 7 et 8.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2223/Prog_colle_semaine_07et08.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Chapitre 21. Espaces vectoriels.

Reprise du chapitre.

Chapitre 23. Espaces vectoriels de dimension finie.

Reprise du chapitre.
I) Compléments sur familles libres, génératrices, bases (rappels).
II) Espaces vectoriels de dimension finie
III) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.

▲ **Ne sont pas au programme cette semaine :**
Matrices d'applications linéaires ;
Rang d'applications linéaires ;
Noyau, image et rang d'une matrice.

Chapitre 24. Ensembles finis et dénombrement.

I) Ensembles finis
Définition. Un ensemble est dit fini lorsqu'il est vide ou en bijection avec un ensemble $[\![1\,;\, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Cardinal d'un ensemble fini. Notations $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A})$, $|\mathrm{A}|$, $\#\mathrm{A}$.

Proposition. Si $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ est une application bijective avec E fini, alors F est fini de même cardinal.

▲ L'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme, mais c'est parfois utile de préciser celles-ci.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Proposition. Soit $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.
Si E est fini et f est surjective, alors F est fini et $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) \geqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$.
Si F est fini et f est injective, alors E est fini et $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$.
Si E et F sont finis de même cardinal, alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Application du premier point au principe des tiroirs.

II) Cardinaux, dénombrement
1) Opérations sur les cardinaux
Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, complémentaire, produit cartésien. Union disjointe d'un nombre fini d'ensembles finis.

▲ La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments d'un ensemble de cardinal n ; c'est n^p.

2) Arrangements et injections
Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, c'est $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
Un arrangement de p éléments de F est une p-liste d'éléments de F deux à deux distincts, ie $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{F}$ tels que $\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, p]\!]^2$, $x_i \neq x_j$.

3) Permutations et bijections
Proposition. Si E et F sont des ensembles finis de même cardinal n, alors le nombre de bijections de E dans F est $\mathrm{A}_n^n = n!$.
Une permutation d'un ensemble E de cardinal n est un arrangement de n éléments de E, ie une bijection de E dans E.
Nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ; c'est $n!$.
C'est aussi le nombre de façons d'ordonner E.

4) Parties d'un ensemble et combinaisons
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble fini de cardinal n.
Exemples.
Nombre d'anagrammes d'un mot.
Nombre de façons de choisir, parmi n joueurs disponibles, une équipe de k joueurs, dont p titulaires.
Exemples de techniques de double comptage (question de cours).
Démonstrations combinatoires des formules de Pascal et du binôme.

▲ Les étudiants doivent savoir distinguer les situations et utiliser les outils correspondants. Situations additives, multiplicatives, identiques, injectives, avec ordre, sans ordre...

Chapitre 25. Analyse asymptotique.

Développements limités et applications.