Programme de colle semaines 21 et 22 - du 27/02 au 10/03

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 7 et 8.

http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2223/Prog_colle_semaine_07et08.pdf

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Chapitre 19. Ensembles et applications.

I) Ensembles

Appartenance, inclusion, égalité de deux ensembles.

Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.

Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E .

Partie A d'un ensemble E vérifiant une condition, une propriété $\mathcal{P}(x)$ dont la valeur de vérité dépend de $x \in E$. Notation $A = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. Application au paradoxe de Russell.

Partie A d'un ensemble E définie comme l'image d'une fonction à valeurs dans E .

Exemples $f(I) = \{f(x) ; x \in \mathbb{R}\}$ où $f : I \rightarrow \mathbb{R} ; \mathbb{U} = \{e^{it} ; t \in \mathbb{R}\}$.

Opérations sur les parties d'un ensemble.

Réunion $A \cup B$, intersection $A \cap B$, complémentaire $E \setminus A = \mathcal{C}_A^E = \overline{A}$,
différence symétrique $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (« ou exclusif »).

Lien entre connecteurs logiques (et, ou, non) et opérations ensemblistes.

Propriétés.

$$A \cup B = B \cup A ;$$

$$A \cap B = B \cap A ;$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ;$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ;$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} ;$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} ;$$

Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles $\prod_{i=1}^n E_i = E_1 \times \cdots \times E_n$.

II) Applications

1) Application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F ; graphe d'une application.

Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E pour l'ensemble des applications de E dans F .

Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble d'indices I .

C'est une application de I dans E . Notation $(x_i)_{i \in I}$.

Cas $I = \mathbb{N}$; notation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est une suite d'éléments de E .

Cas $I = \llbracket 1 ; n \rrbracket$; notation $(x_1, \dots, x_n)$, c'est un n -uplet d'éléments de E .

2) Exemples classiques.

Application id_E .

Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E. Notation 1_A . Lien avec les opérations sur les ensembles.

$$\text{Projections canoniques } p_1: \begin{cases} E \times F \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x \end{cases} ; p_2: \begin{cases} E \times F \longrightarrow F \\ (x, y) \longmapsto y \end{cases} ; p_i: \begin{cases} \prod_{j=1}^n E_j \longrightarrow E_i \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i \end{cases} .$$

3) Restriction. Notation $f|_A$ pour $A \subset E$ et $f \in F^E$.

Prolongement d'une application. On dit que g est un prolongement de f lorsque f est une restriction de g .

4) Image directe. Notation $f(A)$. Image d'une fonction $\text{Im}(f) = f(E)$.

5) Image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$.

6) Composition. Propriété $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

III) Injections, surjections, bijections

Définition pour $f \in F^E$.

Exemples. L'identité, les projections canoniques, l'injection canonique $i: \begin{cases} A \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$ pour $A \subset E$.

On peut construire une injection $j: \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ x \longmapsto \{x\} \end{cases}$. Une application $f: \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ n'est jamais

surjective, la partie $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ n'étant pas atteinte.

Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.

Réciproque.

Définition, notation f^{-1} . C'est une bijection, vérifiant $(f^{-1})^{-1} = f$; $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$; $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$.

Proposition. Si $h \in E^F$ vérifie $h \circ f = \text{id}_E$; $f \circ h = \text{id}_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = h$.

Réciproque de la composée de deux applications bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Si f est bijective et $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$: l'image réciproque de B par f est l'image directe de B par f^{-1} .

Involution. Définition (vocabulaire), exemples.

Chapitre 20. Divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Tout le chapitre. Voir résumé de cours.

▲ Les points suivants sont hors programme en filière PTSI. La relation de Bézout, les entiers premiers entre eux, le lemme de Gauss, le vocabulaire valuation p -adique, les congruences, l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

▲ La caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p -adiques et l'expression du pgcd et du ppcm à l'aide des valuations p -adiques ont été énoncées, mais sont hors programme.

Chapitre 21. Espaces vectoriels.

I) Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition.

Exemples $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$, E^Ω où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}^{np}$ écrit comme un tableau et non horizontalement. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Si E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, c'est aussi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Produit $E \times F$ de deux sous-espaces vectoriels.

Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.

II) Sous-espaces vectoriels

Définition, caractérisation par : $F \subset E$; $F \neq \emptyset$ (ou $0_E \in F$) ; $\forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x + y \in F$.
Stabilité par combinaison linéaire.

Exemples. $\{0_E\}$, E , droites et plans. Les espaces $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, les fonctions paires, impaires, les matrices triangulaires supérieures, diagonales, symétriques, antisymétriques. Les suites convergentes (ie admettant une limite finie, réelle). Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, d'une équation différentielle linéaire homogène.

Intersection (quelconque) de sous-espaces vectoriels $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Sous-espace engendré par une partie $X \subset E$. C'est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant X . C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient X . Même définition pour une famille X .

▲ Pour cette année en PTSI, on peut se restreindre dans la suite à une partie finie $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Il est cependant intéressant de comprendre que les fonctions polynomiales sans borne sur leur degré est le Vect d'une partie infinie.

Pour $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, définition de $\text{Vect}(X)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par X .

On obtient une autre technique pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, en le décrivant comme un Vect.

Exemples. Trouver une équation de plan de l'espace décrit comme $\text{Vect}((2, 0, 1), (1, -1, 0))$ de deux vecteurs non colinéaires, en éliminant (a, b) dans $\exists (a, b) \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = a(2, 0, 1) + b(1, -1, 0)$.

Les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 sur $\mathbb{R}$,

$$F = \{x \mapsto ax^2 + bx + c ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$$

Brève extension à une partie quelconque X , $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de X . C'est le sous-espace vectoriel engendré par X .

Exemples. Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ sont $F = \text{Vect}(x \mapsto x^k ; k \in \mathbb{N})$.

Le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(x \mapsto \cos(kx); x \mapsto \sin(kx) ; k \in \mathbb{N})$.

Il contient les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \sin^n(x)$, on obtient une décomposition en les linéarisant.

▲ L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'a pas encore été défini. On peut néanmoins se placer dans celui des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.