Programme de colle semaines 19 et 20 - du 30/01 au 24/02

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 7 et 8.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2223/Prog_colle_semaine_07et08.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Révisions.

Tout, notamment des équivalents qui peuvent être appliqués aux suites, du calcul matriciel.

Chapitre 17. Suites.

1) Modes de définition.
Explicitement, implicitement, par récurrence.
2) Limites
Suites convergentes, suites tendant vers $+\infty$, $-\infty$.
3) Suites extraites
Utilisation pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite.
4) Suite majorée minorée, bornée
Toute suite convergente est bornée.
5) Opérations et limites.
Somme, multiplication par un réel. [combinaison linéaire]
Produit, inverse, quotient.
Composition d'une suite tendant vers a par une fonction admettant une limite en a.
6) Inégalités et limites.
Passage à la limite dans une inégalité large. Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.
7) Monotonie.
Caractérisation pour les suites. Théorème de la limite monotone : convergence ou limite infinie.
8) Suites adjacentes.
Définition et théorème.

9) Compléments sur borne inférieure et supérieure.
Caractérisation de sup(A) parmi les majorants comme limite d'une suite d'éléments de A.

11) Équivalents usuels.
Rappels d'application de ceux des fonctions, comme $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

11) Suites à valeurs complexes.
Convergence d'une suite complexe. Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire. Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.

Exemples.

Convergence et limite de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$; divergence vers $+\infty$ de $(|q^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $|q| > 1$; cas $q = 1$ et $q = -1$.

Convergence de $\left(\dfrac{z^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0, où $z \in \mathbb{C}$.

12) Étude de suites particulières.

1) Suites arithmético-géométriques.

Calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

2) Suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

Résolution de (R) : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où $a, b \in \mathbb{C}$. Équation caractéristique. Forme (générale) des solutions à valeurs complexes ; à valeurs réelles lorsque $a, b \in \mathbb{R}$.

Calcul du terme général lorsque $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ sont donnés.

3) Exemples d'étude de suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Chapitre 18. Dérivation.

I) Compléments sur les propriétés locales

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a,

ie $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$ avec $\varepsilon(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Notion de dérivabilité à droite, à gauche en a.

II) Compléments sur les fonctions dérivables [global]

Cadre. $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, à valeurs réelles, et $a \in \mathrm{I}$.

Proposition.

Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, où a est un point intérieur à I (ie pas une extrémité), alors $f'(a) = 0$.

Théorème de Rolle.

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

Égalité / Théorème des accroissements finis.

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors $\exists c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Application : inégalités des accroissements finis (1).

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in\,]\,a\,;b\,[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$.

La démonstration, en une ligne, est à savoir refaire : encadrer $m \leqslant f'(c) \leqslant \mathrm{M}$, puis multiplier l'inégalité par $b-a$ qui est strictement positif.

Inégalités des accroissements finis (2).

Si f est dérivable sur I, et $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{K}$, alors $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{K}\,|x-y|$ (on dit que f est K-lipschitzienne sur I).

Pour les fonctions à valeurs complexes (admis dans ce chapitre) :
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{K}$, $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{K}\,|x-y|$.

Exemples.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $\mathrm{e}^x \leqslant x+1$. Pour tout $x \in [\,1\,;{+\infty}\,[$, $\ln(1+x) \leqslant x$. On en déduit $\mathrm{e}^x \leqslant x+1$ sur $\mathbb{R}$ et $\ln(1+x) \leqslant x$ sur $]\,-1\,;{+\infty}\,[$.

Application - exercice.
Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f \ : \ [\,a\,;b\,] \longrightarrow [\,a\,;b\,]$ est dérivable et vérifie $|f'| \leqslant \mathrm{K}$ avec $\mathrm{K} \in [\,0\,;1\,[$. Convergence vers l'unique point fixe et inégalités de distances avec le TAF.

Preuve du lien entre le signe de f' et les variations de f sur I.
f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
f est strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle de longueur strictement positive.

Théorème de limite de la dérivée.
Si f est continue sur I, dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, et $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{{-\infty}, {+\infty}\}$,
alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a, x \neq a]{} \ell$.
En particulier, sous ces hypothèses, f est dérivable en a si et seulement si $\ell \in \mathbb{R}$ et dans ce cas $f'(a) = \ell$.
Il existe des fonctions dérivables où la dérivée n'est pas continue, comme $x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.

III) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
Définition. Notations $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{C})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{C})$.
Propriétés. Ces ensembles sont stables pour les opérations $f+g, \lambda f$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, composées $g \circ f$, réciproques, lorsque la dérivée de la réciproque à un sens.
Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$