Programme de colle semaines 17 et 18 - du 16/01 au 27/01

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 7 et 8.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2223/Prog_colle_semaine_07et08.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Révisions.

Révisions de l'analyse, notamment des équivalents qui peuvent être appliqués aux suites.

Chapitre 16. Calcul matriciel.

1) Ensembles de matrices : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Opérations sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: combinaisons linéaires.

Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$ est un groupe abélien, que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3) Produit de matrices

Définitions, exemples. Attention à la compatibilité des tailles. AB et BA n'ont pas la même taille en général. On peut avoir $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$. On peut avoir $\mathrm{AB} = 0$ avec $\mathrm{A} \neq 0$ et $\mathrm{B} \neq 0$.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

La j^{e} colonne de AB est le produit de A par la j^{e} colonne de B.

La i^{e} ligne de AB est le produit de la i^{e} ligne de A par B.

Propriétés. $\mathrm{A} \times 0 = 0$; $0 \times \mathrm{A} = 0$; associativité et bilinéarité du produit.

4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent. Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}); +; \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$.

5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition : A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche (admis).

Propriété $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$. Ensemble $\mathrm{G}l_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n, appelé groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{K}$. Propriétés signifiant que $(\mathrm{G}l_n(\mathbb{K}); \times)$ est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de $\mathrm{A}^2 - 8\mathrm{A} + \mathrm{I}_2 = 0$ ou en résolvant un système linéaire (cas simples).

6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations $+$, $\cdot$, $\times$ des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

7) Systèmes linéaires.

Écriture matricielle, vocabulaire, résolution avec l'algorithme du pivot de Gauss.

8) Transposition

Définition de ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}^\mathrm{T}$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Propriétés. $(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B})^\mathrm{T} = \lambda\mathrm{A}^\mathrm{T} + \mathrm{B}^\mathrm{T}$; $(\mathrm{AB})^\mathrm{T} = \mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}$ lorsque compatible ; $\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^\mathrm{T}$ lorsque A est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.