Programme de colle semaine 25 - du 29/03 au 02/04

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 4 e 5.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2021/Prog_colle_semaine_04.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Exemples de questions de cours.

- Donner les critères à vérifier pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathrm{E}, +, \cdot)$. Savoir le faire sur un exemple.
- Soit $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$. Donner la propriété à vérifier pour que f soit une application linéaire, démontrer que $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Définir le noyau de f. Caractérisation de f injective.
- Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner les critères à vérifier pour que F et G soient supplémentaires. Savoir le faire sur un exemple.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Donner la définition de X libre.
- Base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Chapitre 19. Espaces vectoriels.

Ensemble du chapitre.
I) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
II) Sous-espaces vectoriels
III) Applications linéaires
Applications linéaires. Une application $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ est dite linéaire lorsque

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Dans ce cas, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Notation $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. C'est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de F^{E}.

Exemples.
Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
L'identité id_{E}, les homothéties $\lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
La transposition dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La dérivation sur les fonctions dérivables.
Pour $a \in \mathrm{I}$, la prise de la primitive s'annulant en a ; $f \longmapsto \left[x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$.
L'intégrale sur les fonctions continues sur I est linéaire. Pour $a, b \in \mathrm{I}$, $f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
L'évaluation d'une fonction en a.
La prise de la limite d'une suite convergente.
$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX}$, où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, entre les bons espaces.

$y \longmapsto y' + a(x)y$ entre les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et les fonctions continues.

Vocabulaire.

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E. Notation $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Notation $\mathrm{G}\ell(\mathrm{E})$.

Proposition. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$, ie est linéaire.

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, l'application $\varphi\colon \begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}) & \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G}) \\ \quad g & \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

Pour $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, l'application $\psi\colon \begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G}) \\ \quad f & \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Conséquence. On dispose des propriétés signifiant que $\mathrm{G}\ell(\mathrm{E})$ est un groupe, non abélien en général.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

En particulier, l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Noyau, notation $\ker(f)$ ou $\mathrm{Ker}\,(f)$. C'est un sous-espace vectoriel.

Conséquence. On peut montrer que F est un sous-espace vectoriel en le décrivant comme un noyau, ou une intersection de noyaux. Cela ne dispense pas de montrer la linéarité des application linéaires invoquées.

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \{0_\mathrm{E}\}$,
c'est-à-dire lorsque $\forall x \in \mathrm{E} \quad f(x) = 0_\mathrm{F} \Longrightarrow x = 0_\mathrm{E}$.

IV) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Somme directe. Caractérisation par l'intersection.

Sous-espaces supplémentaires.

Exemples.

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (fait en exemple de cours, raisonnement par analyse-synthèse).

Les fonctions paires et les fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^\mathrm{I}$ (où I est symétrique par rapport à 0). (fait au Chapitre 4).

Pour $a \in \mathrm{I}$, les fonctions s'annulant en a et les fonctions constantes $\mathrm{Vect}\,(1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^\mathrm{I}$.

V) Familles finies.

Familles libres, liées, génératrices, bases. Vecteurs linéairement indépendants.

Exemples de différentes techniques pour montrer la liberté d'une famille.

Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

▲ L'objectif principal de ce paragraphe est d'étudier la liberté d'une famille finie. Les coordonnées dans une base feront l'objet d'un chapitre ultérieur.

▲ L'espace vectoriel $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ n'a pas encore été défini. On peut néanmoins se placer dans celui des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

Chapitre 20. Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$.

Tout le chapitre. Voir résumé de cours.

▲ Les points suivants sont hors programme en filière PTSI. La relation de Bézout, les entiers premiers entre eux, le lemme de Gauss, le vocabulaire valuation p-adique, les congruences, l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

▲ La caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques et l'expression du pgcd et du ppcm à l'aide des valuations p-adiques ont été énoncées, mais sont hors programme.