Programme de colle semaine 22 - du 08/03 au 12/03

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 4 e 5.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2021/Prog_colle_semaine_04.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Exemples de questions de cours.

- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis (3 versions) ; définir une fonction k-lipschitzienne.
- Énoncer la formule de Leibniz (produit de fonctions n fois dérivables).
- Énoncer la définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- Énoncer le théorème de limite de la dérivée.
- Soient $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$.
  Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Soient $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$.
  Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Chapitre 17. Dérivation.

I) Compléments sur les propriétés locales

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, ie $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$ avec $\varepsilon(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Notion de dérivabilité à droite, à gauche en a.

II) Compléments sur les fonctions dérivables [global]

Cadre. $f\ :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, à valeurs réelles, et $a \in \mathrm{I}$.

1) Extrema

Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, où a est un point intérieur à I (ie pas une extrémité), alors $f'(a) = 0$.

2) Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

3) Égalité / Théorème des accroissements finis

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors $\exists c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corollaire. Inégalités des accroissements finis (1).

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \,]\,a\,;b\,[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$.

4) Fonction k-lipschitzienne.
Définition (valable pour les fonctions à valeurs complexes).
Si f est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.
Si f est k-lipschitzienne et dérivable sur I, alors $|f'| \leqslant k$.

5) Inégalités des accroissements finis (2)
Si f est dérivable sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

Pour les fonctions à valeurs complexes (admis dans ce chapitre) :
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

6) Application - exercice.
Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f \ : \ [a\,;b] \longrightarrow [a\,;b]$ est k-contractante.

7) Preuve du lien entre le signe de f' et les variations de f sur I.
f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
f est strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle de longueur strictement positive.

8) Théorème de limite de la dérivée
Si f est continue sur I, dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, et $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a, x \neq a]{} \ell$.
En particulier, sous ces hypothèses, f est dérivable en a si et seulement si $\ell \in \mathbb{R}$ et dans ce cas $f'(a) = \ell$.
Il existe des fonctions dérivables où la dérivée n'est pas continue, comme $x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.

III) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
Définition. Notations $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{C})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{C})$.
Propriétés. Ces ensembles sont stables pour les opérations $f + g, \lambda f$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, composées $g \circ f$, réciproques, lorsque la dérivée de la réciproque à un sens.
Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Chapitre 18. Ensembles et applications.

I) Ensembles
Appartenance, inclusion, égalité de deux ensembles.
Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.
Ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties d'un ensemble E.
Partie A d'un ensemble E vérifiant une condition, une propriété $\mathscr{P}(x)$ dont la valeur de vérité dépend de $x \in \mathrm{E}$. Notation $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid \mathscr{P}(x)\}$. Application au paradoxe de Russel.
Partie A d'un ensemble E définie comme l'image d'une fonction à valeurs dans E.
Exemples $f(\mathrm{I}) = \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ où $f \ : \ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{it}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$.

Opérations sur les parties d'un ensemble.

Réunion $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, intersection $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, complémentaire $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = \complement_{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}} = \overline{\mathrm{A}}$,
différence symétrique $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (« ou exclusif »).

Lien entre connecteurs logiques (et, ou, non) et opérations ensemblistes.

Propriétés.
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$;
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$;
$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$;
$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$;
$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$;
$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$;
$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$;
$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$;

Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i = \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$.

II) Applications

1) Application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F ; graphe d'une application.
Notations $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et F^{E} pour l'ensemble des applications de E dans F.
Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble d'indices I.
C'est une application de I dans E. Notation $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$.
Cas $\mathrm{I} = \mathbb{N}$; notation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est une suite d'éléments de E.
Cas $\mathrm{I} = [\![1 ; n]\!]$; notation $(x_1, \ldots, x_n)$, c'est un n-uplet d'éléments de E.

2) Exemples classiques.
Application id_{E}.
Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E. Notation $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$. Lien avec les opérations sur les ensembles.

Projections canoniques $p_1 : \begin{cases} \mathrm{E} \times \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E} \\ (x, y) \longmapsto x \end{cases}$; $p_2 : \begin{cases} \mathrm{E} \times \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F} \\ (x, y) \longmapsto y \end{cases}$; $p_i : \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}_j \longrightarrow \mathrm{E}_i \\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i \end{cases}$.

3) Restriction. Notation $f_{|\mathrm{A}}$ pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.
Prolongement d'une application. On dit que g est un prolongement de f lorsque f est une restriction de g.

4) Image directe. Notation $f(\mathrm{A})$. Image d'une fonction $\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{E})$.

5) Image réciproque. Notation $f^{-1}(\mathrm{B})$.

6) Composition. Propriété $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

III) Injections, surjections, bijections

Définition pour $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.

Exemples. L'identité, les projections canoniques, l'injection canonique $i : \begin{cases} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{E} \\ x \longmapsto x \end{cases}$ pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$.

On peut construire une injection $j : \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ x \longmapsto \{x\} \end{cases}$. Une application $f : \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ n'est jamais surjective, la partie $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \notin f(x)\}$ n'étant pas atteinte.

Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.

Réciproque.
Définition, notation f^{-1}. C'est une bijection, vérifiant $(f^{-1})^{-1} = f$; $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$; $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.
Proposition. Si $h \in \mathrm{E}^{\mathrm{F}}$ vérifie $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$; $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$, alors f est bijective et $f^{-1} = h$.

Réciproque de la composée de deux applications bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Si f est bijective et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$, alors $f^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{B})$: l'image réciproque de B par f est l'image directe de B par f^{-1}.

Involution. Définition (vocabulaire), exemples.

IV) Relations

Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité.

Relation d'équivalence. classes d'équivalence.

▲ La notion d'ensemble quotient est hors programme.

▲ Définition d'une relation d'ordre, mais hors programme.

Exemples de relations.

L'inclusion $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

La divisibilité dans $\mathbb{N}$. $d|n \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad n = kd$.

La divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

La congruence modulo α dans $\mathbb{R}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, notamment $\alpha = 2\pi$. $x = y[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = y + k\alpha$.

La congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$. $k \equiv k' \mod n \iff n|(k - k') \iff \exists p \in \mathbb{Z} \quad k = k' + np$.