Programme de colle semaine 21 - du 01/03 au 05/03

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 4 e 5.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2021/Prog_colle_semaine_04.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Exemples de questions de cours.

- Énoncer la définition : formule des coefficients d'un produit de matrices. Calcul sur des exemples.
- Énoncer la formule du binôme pour les matrices en précisant les hypothèses. Que vaut A^0 ? Utilisation sur des exemples.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis (3 versions) ; définir une fonction k-lipschitzienne.
- Énoncer la formule de Leibniz (produit de fonctions n fois dérivables).
- Énoncer la définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Chapitre 16. Calcul matriciel.

1) Ensembles de matrices : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Opérations sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: combinaisons linéaires.

Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$ est un groupe abélien, que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3) Produit de matrices

Définitions, exemples. Attention à la compatibilité des tailles. AB et BA n'ont pas la même taille en général. On peut avoir $AB \neq BA$. On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire de matrice augmentée $(A|B)$.

La j^{e} colonne de AB est le produit de A par la j^{e} colonne de B.

La i^{e} ligne de AB est le produit de la i^{e} ligne de A par B.

Propriétés. $A \times 0 = 0$; $0 \times A = 0$; associativité et bilinéarité du produit.

4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent. Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}); +; \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$.

5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition : A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche (admis).

Propriété $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Ensemble $Gl_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n, appelé groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{K}$. Propriétés signifiant que $(Gl_n(\mathbb{K}); \times)$ est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de $A^2 - 8A + I_2 = 0$.

6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations $+$, $\cdot$, $\times$ des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

7) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires. Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $\mathrm{EA} = \mathrm{R}$. Application au calcul effectif de l'inverse de A lorsque A est de rang n (maximal).

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne de coefficients $x_1, \ldots, x_n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}_n$ (ie A est de rang n)

(iii) Le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que le solution nulle.

(iv) $\forall \mathrm{B} \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.

(v) $\forall \mathrm{B} \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.

Critère pour déterminer si A est inversible, et dans ce cas, calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

8) Transposition

Définition de ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}^\mathrm{T}$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Propriétés. ${}^t(\lambda \mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda\, {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B}$; ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\, {}^t\mathrm{A}$ lorsque compatible ; $\left({}^t\mathrm{A}\right)^{-1} = {}^t(\mathrm{A}^{-1})$ lorsque A est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.