Programme de colle semaine 15 - du 04/01 au 08/01

Présentation et conseils. On peut voir la présentation et des conseils pour les colles dans les programmes des premières semaines, 4 e 5.

`http://thierry.limoges.free.fr/PTSI_2021/Prog_colle_semaine_04.pdf`

Rappel. L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Exemples de questions de cours.

- Énoncer la définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ pour $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec des quantificateurs (un cas parmi neuf).
- Tous les équivalents usuels. Une erreur sur un équivalent usuel, une application d'une formule ailleurs qu'au bon voisinage, une somme ou une composition d'équivalents entraîne une note inférieure à 9.
- Plan d'étude de recherche d'asymptote pour une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Chapitre 10. Primitives (2).

Reprise de l'ensemble du chapitre.

Chapitre 11. Nombres réels (2).

1) Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

Pour A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, l'ensemble des majorants de A est de la forme $[\,\mathrm{M}_0\,;+\infty\,[$. On note $\mathrm{M}_0 = \sup(\mathrm{A})$ le plus petit (minimum) des majorants.

Si A admet un maximum, alors $\max(\mathrm{A}) = \sup(\mathrm{A})$.

Exemples du cours.
$\mathrm{A} = \left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$; $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} = \,]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,[$; $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ partie de $\mathbb{Q}$ bornée, sans bornes supérieure ni inférieure dans $\mathbb{Q}$.

2) Partie entière d'un réel

Définition. Unique entier k tel que $k \leqslant x < x + 1$, ie $x \in [\,k\,;k+1\,[$. Notation $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x)$.

Exemples du cours. Courbe et 1-périodicité de la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.
Courbe de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

3) Approximation décimale d'un réel.

Définition. Voir exercice 3.

Chapitre 12. Continuité.

I) Étude locale : limites.

Cadre : f est une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Propriété vraie au voisinage de a, pour $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

1) Limites

Définitions : pour $a \in \mathrm{I}$ ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a. Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ (9 cas).

Unicité de la limite.

Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Limite à droite, à gauche, pour une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

2) Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a (somme, produit par un réel, produit, quotient). Composition. Limite d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a.

3) Inégalités et limites.

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$) et de majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

4) Continuité en a.

Continuité de f en un $a \in \mathrm{I}$. Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en a lorsque f est définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues en a : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composition $g \circ f$ de f continue en a et de g continue en $f(a)$.

II) Équivalents de fonctions : relation $\sim$.

Voir résumé de cours.

Propriétés usuelles découlant des limites : constantes non nulles, produit, quotient, puissance α.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Équivalents usuels.

Application au calcul de limites et étude de signes.

Application à la recherche d'asymptote oblique : vocabulaire branche parabolique d'une direction donnée.

III) Continuité sur un intervalle (étude « globale »)

Définition. Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composée $g \circ f$ de f continue sur I et de g continue sur $f(\mathrm{I})$.

Théorème des valeurs intermédiaires : énoncé et corollaire équivalent : l'image par f continue de I intervalle est un intervalle.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (théorème admis).

L'image d'un segment par une fonction continue sur celui-ci est un segment. Les autres formes d'intervalles ne sont pas conservées en général.