Programme de colle semaine 22 - du 09/03 au 13/03

Questions de cours

- L'interrogation orale (colle) comportera une ou des questions de cours, ou proche du cours. Celle-ci pourra être posée par l'examinateur au début ou pendant la colle.
  Voici ci-dessous des **exemples** de questions de cours.
- Soient $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$.
  1) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
  2) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Soient $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$.
  1) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
  2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Donner les critères à vérifier pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathrm{E}, +, \cdot)$.
- Soit $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$. Donner la propriété à vérifier pour que f soit une application linéaire, démontrer que $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.

L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Chapitre 20. Ensembles et applications.

I) Ensembles

Appartenance, inclusion, égalité de deux ensembles.

Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.

Ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties d'un ensemble E.

Partie A d'un ensemble E vérifiant une condition, une propriété $\mathscr{P}(x)$ dont la valeur de vérité dépend de $x \in \mathrm{E}$. Notation $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid \mathscr{P}(x)\}$. Application au paradoxe de Russel.

Partie A d'un ensemble E définie comme l'image d'une fonction à valeurs dans E.

Exemples $f(\mathrm{I}) = \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ où $f\ :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{it}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$.

Opérations sur les parties d'un ensemble.

Réunion $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, intersection $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, complémentaire $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = \complement_{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}} = \overline{\mathrm{A}}$,
différence symétrique $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (« ou exclusif »).

Lien entre connecteurs logiques (et, ou, non) et opérations ensemblistes.

Propriétés.

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$;
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$;
$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$;
$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$;
$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$;
$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$;
$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$;
$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$;

Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles $\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i = \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$.

II) Applications

1) Application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F ; graphe d'une application. Notations $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et F^{E} pour l'ensemble des applications de E dans F.
Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble d'indices I.
C'est une application de I dans E. Notation $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.
Cas $\mathrm{I}=\mathbb{N}$; notation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est une suite d'éléments de E.
Cas $\mathrm{I}=[\![1\,;\,n]\!]$; notation $(x_1,\ldots,x_n)$, c'est un n-uplet d'éléments de E.

2) Exemples classiques.
Application id_{E}.
Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E. Notation $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$. Lien avec les opérations sur les ensembles.

Projections canoniques $p_1\colon \begin{cases} \mathrm{E}\times\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E} \\ (x,y) \longmapsto x \end{cases}$; $p_2\colon \begin{cases} \mathrm{E}\times\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F} \\ (x,y) \longmapsto y \end{cases}$; $p_i\colon \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n}\mathrm{E}_j \longrightarrow \mathrm{E}_i \\ (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto x_i \end{cases}$.

3) Restriction. Notation $f_{|\mathrm{A}}$ pour $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$ et $f\in\mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.
Prolongement d'une application. On dit que g est un prolongement de f lorsque f est une restriction de g.

4) Image directe. Notation $f(\mathrm{A})$. Image d'une fonction $\mathrm{Im}(f)=f(\mathrm{E})$.

5) Image réciproque. Notation $f^{-1}(\mathrm{B})$.

6) Composition. Propriété $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

III) Injections, surjections, bijections

Définition pour $f\in\mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.

Exemples. L'identité, les projections canoniques, l'injection canonique $i\colon \begin{cases} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{E} \\ x \longmapsto x \end{cases}$ pour $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$.
On peut construire une injection $j\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ x \longmapsto \{x\} \end{cases}$. Une application $f\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ n'est jamais surjective, la partie $\mathrm{A}=\{x\in\mathrm{E}\mid x\notin f(x)\}$ n'étant pas atteinte.
Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.
Réciproque.
Définition, notation f^{-1}. C'est une bijection, vérifiant $(f^{-1})^{-1}=f$; $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$; $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.
Proposition. Si $h\in\mathrm{E}^{\mathrm{F}}$ vérifie $h\circ f=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$; $f\circ h=\mathrm{id}_{\mathrm{F}}$, alors f est bijective et $f^{-1}=h$.
Réciproque de la composée de deux applications bijectives, $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.
Si f est bijective et $\mathrm{B}\subset\mathrm{F}$, alors $f^{-1}(\mathrm{B})=f^{-1}(\mathrm{B})$: l'image réciproque de B par f est l'image directe de B par f^{-1}.
Involution. Définition (vocabulaire), exemples.

IV) Relations

Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité.
Relation d'équivalence. classes d'équivalence.
▲ La notion d'ensemble quotient est hors programme.
▲ Définition d'une relation d'ordre, mais hors programme.
Exemples de relations.
L'inclusion $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.
La divisibilité dans $\mathbb{N}$. $d|n \iff \exists k\in\mathbb{N}\quad n=kd$.
La divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
La congruence modulo α dans $\mathbb{R}$ où $\alpha\in\mathbb{R}^*$, notamment $\alpha=2\pi$. $x=y[\alpha] \iff \exists k\in\mathbb{Z}\quad x=y+k\alpha$.
La congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$. $k\equiv k' \mod n \iff n|(k-k') \iff \exists p\in\mathbb{Z}\quad k=k'+np$.

Chapitre 21. Espaces vectoriels.

I) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition.

Exemples $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$, E^Ω où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{R}^\mathrm{I}$, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}^{np}$ écrit comme un tableau et non horizontalement. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Produit $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ de deux sous-espaces vectoriels.

Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.

II) Sous-espaces vectoriels

Définition, caractérisation par : $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$; $\mathrm{F} \neq \varnothing$ (ou $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}$) ; $\forall (x,y) \in \mathrm{F}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x + y \in \mathrm{F}$.

Stabilité par combinaison linéaire.

Exemples. $\{0_\mathrm{E}\}$, E, droites et plans. Les espaces $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, les fonctions paires, impaires, les matrices triangulaires supérieures, diagonales, symétriques, antisymétriques. Les suites convergentes (ie admettant une limite finie, réelle). Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, d'une équation différentielle linéaire homogène.

Intersection (quelconque) de sous-espaces vectoriels $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{F}_i$.

Sous-espace engendré par une partie $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$. C'est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant X. C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient X. Même définition pour une famille X.

▲ Pour cette année en PTSI, on peut se restreindre dans la suite à une partie finie $\mathrm{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Il est cependant intéressant de comprendre que les fonctions polynomiales sans borne sur leur degré est le Vect d'une partie infinie.

Pour $\mathrm{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, définition de $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X})$, l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par X.

On obtient une autre technique pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, en le décrivant comme un Vect.

Exemples. Trouver une équation de plan de l'espace décrit comme $\mathrm{Vect}\,((2,0,1),(1,-1,0))$ de deux vecteurs non colinéaires, en éliminant (a,b) dans $\exists (a,b) \in \mathbb{R} \quad (x,y,z) = a(2,0,1) + b(1,-1,0)$.

Les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 sur $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{F} = \{x \longmapsto ax^2 + bx + c \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, f_2)$$

Brève extension à une partie quelconque X, $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de X. C'est le sous-espace vectoriel engendré par X.

Exemples. Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ sont $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,\left(x \longmapsto x^k \ ; \ k \in \mathbb{N}\right)$.

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(x \longmapsto \cos(kx); x \longmapsto \sin(kx) \ ; \ k \in \mathbb{N})$.
Il contient les fonctions $x \longmapsto \cos^n(x)$ et $x \longmapsto \sin^n(x)$, on obtient une décomposition en les linéarisant.

III) Applications linéaires

Applications linéaires. Une application $f \in \mathrm{F}^\mathrm{E}$ est dite linéaire lorsque

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Dans ce cas, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n \ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Notation $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. C'est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de F^E.

Exemples.

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

L'identité id_E, les homothéties $\lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

La transposition dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

La dérivation sur les fonctions dérivables.

Pour $a \in \mathrm{I}$, la prise de la primitive s'annulant en a ; $f \longmapsto \left[x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$.

L'intégrale sur les fonctions continues sur I est linéaire. Pour $a, b \in \mathrm{I}$, $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

L'évaluation d'une fonction en a.

La prise de la limite d'une suite convergente.

$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX}$, où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, entre les bons espaces.

$y \longmapsto y' + a(x)y$ entre les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et les fonctions continues.

Vocabulaire.

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E. Notation $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Notation $\mathrm{G}\ell(\mathrm{E})$.

Proposition. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$, ie est linéaire.

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, l'application $\varphi \colon \begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G}) \\ \quad g \quad\longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

Pour $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, l'application $\psi \colon \begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G}) \\ \quad f \quad\longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Conséquence. On dispose des propriétés signifiant que $\mathrm{G}\ell(\mathrm{E})$ est un groupe, non abélien en général.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

En particulier, l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Noyau, notation $\ker(f)$ ou $\mathrm{Ker}\,(f)$. C'est un sous-espace vectoriel.

Conséquence. On peut montrer que F est un sous-espace vectoriel en le décrivant comme un noyau, ou une intersection de noyaux. Cela ne dispense pas de montrer la linéarité des application linéaires invoquées.

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \{0_\mathrm{E}\}$,
c'est-à-dire lorsque $\forall x \in \mathrm{E} \quad f(x) = 0_\mathrm{F} \Longrightarrow x = 0_\mathrm{E}$.

▲ Pas de somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires, familles libres, liées, génératrices cette semaine.

▲ L'espace vectoriel $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ n'a pas encore été défini. On peut néanmoins se placer dans celui des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.