Programme de colle semaine 20 - du 10/02 au 14/02

Questions de cours

- L'interrogation orale (colle) comportera une ou des questions de cours, ou proche du cours. Celle-ci pourra être posée par l'examinateur au début ou pendant la colle. Voici ci-dessous des **exemples** de questions de cours.
- Définir une rotation plane de centre Ω et d'angle θ : $r(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, où M' est défini par $\Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) = \theta$ pour $\mathrm{M} \neq \Omega$. Illustrer par un dessin.
  Traduction avec les nombres complexes :
  donner et expliquer les conditions à vérifier sur $f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' \end{cases}$ pour que cette application soit la rotation de centre Ω et d'angle θ : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z' - \omega| = |z - \omega|$ et si $z \neq \omega$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta$.
  On obtient $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.
- Définir une homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $h(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, où M' est défini par $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = \lambda\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$. Illustrer par un dessin.
  Traduction avec les nombres complexes :
  donner et expliquer les conditions à vérifier sur $f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' \end{cases}$ pour que cette application soit l'homothétie de centre Ω et de rapport λ : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis (3 versions) ; définir une fonction k-lipschitzienne.
- Énoncer le théorème de limite de la dérivée.
- Énoncer la formule de Leibniz (produit de fonctions n fois dérivables).
- Énoncer la définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.

Chapitre 18. Nombres complexes (2).

1) Racines n^{es} de l'unité.
2) Racines n^{es} de $\mathrm{A} \in \mathbb{C}$.
3) Applications géométriques des nombres complexes

Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.
Transformation $z \longmapsto z + b$; interprétation en termes de translation.
Transformation $z \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$; rotation plane de centre O et d'angle θ.
Transformation $z \longmapsto \lambda z$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$; homothétie de centre O et de rapport λ.
Transformation $z \longmapsto \overline{z}$; interprétation en termes de symétrie axiale.
Exemples de rotations et d'homothéties dont le centre n'est pas O.
Méthode : changer O en Ω d'affixe ω et considérer le vecteur $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$ d'affixe $z - \omega$.

Chapitre 19. Dérivation.

I) Compléments sur les propriétés locales
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a,
ie $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$ avec $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
Notion de dérivabilité à droite, à gauche en a.

II) Compléments sur les fonctions dérivables [global]
Cadre. $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, à valeurs réelles, et $a \in \mathrm{I}$.

1) Extrema
Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, où a est un point intérieur à I (ie pas une extrémité), alors $f'(a) = 0$.

2) Théorème de Rolle
Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

3) Égalité / Théorème des accroissements finis
Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors $\exists c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Corollaire. Inégalités des accroissements finis (1).
Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in\,]\,a\,;b\,[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$.

4) Fonction k-lipschitzienne.
Définition (valable pour les fonctions à valeurs complexes).
Si f est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.
Si f est k-lipschitzienne et dérivable sur I, alors $|f'| \leqslant k$.

5) Inégalités des accroissements finis (2)
Si f est dérivable sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

Pour les fonctions à valeurs complexes (admis dans ce chapitre) :
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

6) Application - exercice.
Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : [\,a\,;b\,] \longrightarrow [\,a\,;b\,]$ est k-contractante.

7) Preuve du lien entre le signe de f' et les variations de f sur I.
f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
f est strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle de longueur strictement positive.

8) Théorème de limite de la dérivée
Si f est continue sur I, dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, et $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,
alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a, x \neq a]{} \ell$.

En particulier, sous ces hypothèses, f est dérivable en a si et seulement si $\ell \in \mathbb{R}$ et dans ce cas $f'(a) = \ell$.

Il existe des fonctions dérivables où la dérivée n'est pas continue, comme $x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.

III) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Définition. Notations $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{C})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{C})$.

Propriétés. Ces ensembles sont stables pour les opérations $f+g, \lambda f$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, composées $g \circ f$, réciproques, lorsque la dérivée de la réciproque à un sens.

Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$