

## Programme de colle semaine 17 - du 20/01 au 24/01

### Questions de cours

- L'interrogation orale (colle) comportera une ou des questions de cours, ou proche du cours. Celle-ci pourra être posée par l'examinateur au début ou pendant la colle.  
Voici ci-dessous des **exemples** de questions de cours.
- Énoncer la définition : formule des coefficients d'un produit de matrices.
- Énoncer la formule du binôme pour les matrices en précisant les hypothèses. Que vaut  $A^0$  ?
- Énoncer le théorème de convergence par encadrement pour les suites et les théorèmes de divergence par majoration ou minoration.
- Énoncer le théorème de convergence monotone pour les suites. Que dire de l'éventuelle limite d'une suite décroissante ?
- Définir ce que sont des suites adjacentes et énoncer le théorème correspondant.

**L'interrogation peut porter sur l'ensemble des chapitres étudiés depuis le début de l'année. Ceux apparaissant ci-dessous n'en sont que le sommet de la pile.**

### Chapitre 16. Calcul matriciel.

- 1) Ensembles de matrices :  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- 2) Opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  : combinaisons linéaires.

Propriétés signifiant que  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$  est un groupe abélien, que  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- 3) Produit de matrices

Définitions, exemples. Attention à la compatibilité des tailles.  $AB$  et  $BA$  n'ont pas la même taille en général. On peut avoir  $AB \neq BA$ . On peut avoir  $AB = 0$  avec  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ .

Si  $X$  est une matrice colonne,  $AX$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . Écriture matricielle  $AX = B$  d'un système linéaire de matrice augmentée  $(A|B)$ .

La  $j^{\text{e}}$  colonne de  $AB$  est le produit de  $A$  par la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $B$ .

La  $i^{\text{e}}$  ligne de  $AB$  est le produit de la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A$  par  $B$ .

Propriétés.  $A \times 0 = 0$ ;  $0 \times A = 0$ ; associativité et bilinéarité du produit.

- 4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent. Propriétés signifiant que  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}); +; \times)$  est un anneau, non commutatif dès que  $n \geq 2$ .

- 5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition :  $A$  est inversible si et seulement si  $A$  est inversible à droite si et seulement si  $A$  est inversible à gauche (admis).

Propriété  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Ensemble  $Gl_n(\mathbb{K})$  des matrices inversibles d'ordre  $n$ , appelé groupe linéaire d'ordre  $n$  de  $\mathbb{K}$ . Propriétés signifiant que  $(Gl_n(\mathbb{K}); \times)$  est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de  $A^2 - 8A + I_2 = 0$ .

- 6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\times$  des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

- 7) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires. Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire  $A$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , il existe une matrice  $E$  produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite  $R$  telles que  $EA = R$ . Application au calcul effectif de l'inverse de  $A$  lorsque  $A$  est de rang  $n$  (maximal).

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  le vecteur colonne de coefficients  $x_1, \dots, x_n$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est inversible.
- (ii)  $A \sim I_n$  (ie  $A$  est de rang  $n$ )
- (iii) Le système  $AX = 0$  n'admet que le solution nulle.
- (iv)  $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $AX = B$  admet une unique solution.
- (v)  $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $AX = B$  admet au moins une solution.

Critère pour déterminer si  $A$  est inversible, et dans ce cas, calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

#### 8) Transposition

Définition de  ${}^tA = A^T$  pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Propriétés.  ${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB$  ;  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  lorsque compatible ;  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$  lorsque  $A$  est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.

## Chapitre 17. Suites.

### 1) Modes de définition.

Explicitement, implicitement, par récurrence.

### 2) Limites

Suites convergentes, suites tendant vers  $+\infty$ ,  $-\infty$ .

### 3) Suites extraites

Utilisation pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite.

### 4) Suite majorée minorée, bornée

Toute suite convergente est bornée.

### 5) Opérations et limites.

Somme, multiplication par un réel. [combinaison linéaire]

Produit, inverse, quotient.

Composition d'une suite tendant vers  $a$  par une fonction admettant une limite en  $a$ .

### 6) Inégalités et limites.

Passage à la limite dans une inégalité large. Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

### 7) Monotonie.

Caractérisation pour les suites. Théorème de la limite monotone : convergence ou limite infinie.

**Exemples du cours.** Convergence de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  ; divergence de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

### 8) Suites adjacentes.

Définition et théorème.

### 9) Compléments sur borne inférieure et supérieure.

Caractérisation de  $\sup(A)$  parmi les majorants comme limite d'une suite d'éléments de  $A$ .

### 10) Suites à valeurs complexes.

Convergence d'une suite complexe. Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire. Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.

**Exemples du cours.** Convergence et limite de  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $q \in \mathbb{C}$  avec  $|q| < 1$  ; divergence vers  $+\infty$  de  $(|q^n|)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $|q| > 1$  ; cas  $q = 1$  et  $q = -1$ .

Convergence et limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$  pour  $q \in \mathbb{C}$  avec  $|q| < 1$ .

- ▲ Pas de suites arithmético-géométriques ni de récurrentes linéaires d'ordre 2 cette semaine.
- ▲ Le TD sur les suites récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$  n'a pas encore eu lieu.