Programme de colle semaine 29 - du 03/06 au 07/06

Questions de cours

- Énoncé d'un DL usuel au voisinage de 0.
- Énoncer la formule de Taylor-Young et en déduire le DL au voisinage de 0 de $(1+x)^\alpha$ ou de e^x.
- Définir une projection orthogonale d'un point sur une droite ou sur un plan. Illustrer par un dessin.
- Donner la forme d'une matrice de rotation dans le plan, d'une symétrie orthogonale dans le plan, dans la base canonique.
- Donner la forme d'une matrice de rotation dans l'espace, d'une réflexion dans l'espace, dans une base adaptée que l'on précisera.
- Séries géométriques : énoncé des sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, somme et reste en cas de convergence.
- Énoncé et démonstration du **Théorème** *(Condition nécessaire de convergence).*
  Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, ie $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
  Donner un contre-exemple de la réciproque (sans démonstration).
- Énoncé du résultat sur les séries de Riemann, cas de divergence grossière.
- Énoncé du théorème de comparaison.
- Énoncé du théorème sur les équivalents.
- Donner un exemple de deux séries divergentes dont la somme est convergente.

Chapitre 25. Géométrie.

I) Géométrie plane
1) Repérage
2) Produit scalaire
3) Produit mixte
4) Droites
5) Cercles
6) Rotations vectorielles
Rotation vectorielle r_θ.
Matrice dans une base orthonormée directe :
$\mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.
Réciproquement, une matrice de cette forme est celle d'une rotation.
Composée de deux rotations, rotation inverse.
7) Symétries orthogonales vectorielles.
Symétrie orthogonale vectorielle.
Matrice dans une base adaptée : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Matrice d'une symétrie orthogonale s_D d'axe D dans une base orthonormée directe :
$\mathrm{A}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

Si $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$, on a $\theta = 2\varphi$ avec $\varphi = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$ l'angle entre l'axe des abscisses et l'axe de symétrie.

On a aussi $\mathrm{D} = \mathrm{Ker}\,(s_{\mathrm{D}} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ les vecteurs invariants.

Composée de deux symétries orthogonales.

$s_{\mathrm{D}'} \circ s_{\mathrm{D}} = r_{\theta'-\theta}$ où s_{D} a pour matrice A_θ, $s_{\mathrm{D}'}$ a pour matrice $\mathrm{A}_{\theta'}$, c'est-à-dire $\theta' - \theta = 2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ et $\mathrm{D}' = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}')$.

II) Géométrie dans l'espace
1) Repérage. Coordonnées cartésiennes. Coordonnées cylindriques.
2) Produit scalaire
3) Produit vectoriel
4) Produit mixte
5) Plans
6) Droites
7) Projection orthogonale sur un plan ou sur une droite. Distance.
8) Sphères
9) Rotations vectorielles, réflexions. Matrice dans une base adaptée.
Chapitre du programme : cliquer ici.

Chapitre 26. Séries numériques.

Voir aussi le poly.

I. Définitions

1) Rappels : suites et sommes géométriques.
2) Notion de série. Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles.
3) Convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.

II. Premières propriétés

1) Condition nécessaire de convergence

Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

2) Séries géométriques. Sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, somme et reste en cas de convergence.
3) Structure. Espaces vectoriels, linéarité de la somme.
4) Suites et séries télescopiques

III. Séries à termes positifs

1) Proposition.
2) Encadrement des sommes partielles par une intégrale : séries $\sum f(n)$, avec f monotone.
3) Séries de Riemann. Exemple d'application - exercice : trouver un équivalent du reste R_n d'une série de Riemann convergente.
4) **Théorème** *(de comparaison).*
5) **Théorème** *(sur équivalents).*
6) **Proposition - méthode.** Comparaison à une série de Riemann.
7) **Proposition - méthode.** Comparaison à une série géométrique.

▲ Les critères de D'Alembert et de Cauchy sont hors programme, mais on peut demander d'étudier les limites de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ou de $[u_n]^{\frac{1}{n}}$ en question intermédiaire, puis comparer à une série géométrique pour obtenir convergence ou divergence.