

Programme de colle semaine 26 - du 06/05 au 10/05

Questions de cours

- Toute question proche du cours.

Chapitre 19. Espaces vectoriels.

Tout ce chapitre est au programme jusqu'à la fin de l'année.

Chapitre 22. Espaces vectoriels de dimension finie.

Tout ce chapitre est au programme jusqu'à la fin de l'année.

Chapitre 23. Applications linéaires en dimension finie.

I) Applications linéaires et matrices

Cadre : dimension finie.

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et à E_2 . Exemples de projection et de symétrie.

Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.

Réciproquement, application linéaire associée à une matrice dans un couple de bases.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée.

Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Matrice de passage d'une base à une autre.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

II) Applications linéaires et rang

Caractérisation des isomorphismes par les bases.

Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.

Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base.

Application à la dimension de l'espace des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux.

Théorème du rang : si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im}(u)$ est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u))$.

Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Applications linéaires $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\text{rg}(u) \leq \dim(E)$, avec égalité si et seulement si u est injective.

Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\text{rg}(u) \leq \dim(F)$, avec égalité si et seulement si u est surjective.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Si u ou v est de rang fini, alors $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$

Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Rappel de la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Interprétation matricielle, vectorielle, avec une application linéaire.

III) Noyau, image et rang d'une matrice

Rappel : application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Image et noyau d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation en termes de systèmes linéaires.

Rang d'une matrice A . Le rang d'une matrice est défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire canoniquement associée à A .

Théorème du rang.

Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.

Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.

Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r , il existe P et Q inversibles telles que $A = Q^{-1}J_rP$,

$$\text{où } J_r \text{ est décrite par blocs : } J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang de la transposée. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice.