

Programme de colle semaine 24 - du 08/04 au 12/04

Questions de cours

- Base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Énoncer la proposition de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$;
puis montrer que $P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P$.
- Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes, puis montrer que pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$,
 $(X - a)^2 \mid P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.
- Énoncer la caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires propre à la dimension finie.
- Toute question proche du cours.

Chapitre 19. Espaces vectoriels.

Tout ce chapitre est au programme jusqu'à la fin de l'année.

Chapitre 21. Polynômes.

I) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Construction possible comme les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ s'annulant à partir d'un certain rang, ie comportant un nombre fini de termes non nuls.

Pour P non nul, on écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n = \max \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$, et $X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$;

$X^k = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ où le 1 est à la k -ième place (en numérotant à partir de zéro).

Le degré de P est n .

Par convention, on pose $\deg(0) = -\infty$, mais pour rédiger en parlant du degré, on traitera souvent à part le cas du polynôme nul (notamment les propositions donnant le comportement du degré vis-vis des opérations)

Le coefficient dominant est a_n .

Le terme de plus haut degré, ou terme dominant, est $a_n X^n$.

P est dit unitaire lorsque $a_n = 1$, ie $P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$.

Opérations. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\text{Combinaison linéaire } \lambda P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda a_k + b_k) X^k.$$

On a $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si et seulement si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ ou $a_n \neq -b_n$, ie tous les cas hors ceux où la somme des termes dominant s'annule, $(a_n + b_n) X^n = 0$.

$$\text{Produit } PQ = R = \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell X^\ell \text{ avec } c_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}.$$

On a $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$.

Composition $Q \circ P = Q(P) = \sum_{k=0}^m b_k P^k$ où $P^0 = 1$ et P^k est le produit $P \times P \times \cdots P$, k fois, défini par récurrence sur k .

On a $\deg(Q(P)) = nm = \deg(P) \times \deg(Q)$.

On a $Q(X) = Q$ et le produit est cohérent avec la notation X^k .

Évaluation d'un polynôme.

Dans $\mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $P(M) = \sum_{k=0}^n a_k M^k$, où $M^0 = I_p$.

Dans $\mathcal{L}(E)$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k$, où $f^0 = \text{id}_E$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ..., $f^{k+1} = f \circ f^k$ est défini par récurrence sur k .

La multiplication des polynômes est envoyée sur la composition des endomorphismes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Proposition. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $\mathbb{K}_n[X]$ en est un sous-espace vectoriel.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, la fonction $\tilde{P}: \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{cases}$, encore notée P , est la fonction polynomiale associée à P . Ce n'est pas une application linéaire en général (comparer avec l'évaluation ci-dessous).

Les évaluations sont des applications linéaires, ie

Pour $x \in \mathbb{K}$ fixé, $\varphi_x: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K} \\ P \longmapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{cases}$ est une forme linéaire,

Pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ fixée, $\varphi_M: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ P \longmapsto P(M) = \sum_{k=0}^n a_k M^k \end{cases}$ est linéaire,

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ fixé, $\varphi_f: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \longmapsto P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k \end{cases}$ est linéaire.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ fixé, la composition à gauche $P: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \longmapsto Q(P) = Q \circ P \end{cases}$ est linéaire.

▲ La semaine prochaine seulement, étude de familles $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes de degrés échelonnés.

II) Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on pose $P' = \sum_{k=1}^n a_k k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) X^k$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, la fonction dérivée de la fonction polynomiale associée à P est la fonction polynomiale associée au polynôme dérivé de P , ie $(\widetilde{P})' = \widetilde{(P')}$,

ie la dérivée de $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est $x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}$.

La dérivation est linéaire, ie $D: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \longmapsto P' \end{cases}$ est linéaire.

Pour $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)' = P'Q + PQ'$, ainsi que la formule de Leibniz qui en découle.

La dérivée k^e d'un polynôme peut-être définie par récurrence. On pose $P^{(0)} = P$, et $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$.

On obtient, pour $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $P^{(k)} = \sum_{i=k}^n a_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k}$ si $k \leq n$, et $P^{(k)} = 0$ si $k \geq n+1$.

Formule de Leibniz.

Formule de Taylor. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, on a $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$.

III) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition et théorème (division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$).

Pour tous polynômes A et B avec $B \neq 0$,

il existe un unique couple (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Méthodes pratiques pour obtenir le quotient et le reste (cas général, ou en les cherchant d'un certain degré lorsque celui-ci est petit).

Exemples de méthodes pour obtenir seulement le reste.

Pour $B \neq 0$, on a $B|A$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV) Racines (ou zéros) d'un polynôme.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, on dit que a est racine de P lorsque $P(a) = 0$.

Caractérisation par la divisibilité. a est racine de P si et seulement si $(X-a)|P$.

Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .

Multiplicité d'une racine. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que a est racine de P de multiplicité (ou d'ordre) m lorsque $(X-a)^m | P$ et $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P .

Vocabulaire racine simple, double, ...

Caractérisation par les dérivées successives. a est racine de P de multiplicité m si et seulement si $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket \quad P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Conséquence. La seule condition $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket \quad P^{(k)}(a) = 0$ est équivalent à $(X-a)^m | P$, c'est-à-dire lorsque a est racine de P d'ordre supérieur ou égal à m .

Le nombre de racines comptées avec multiplicité d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .

Définition d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, d'un polynôme scindé à racines simples.

Proposition. Un polynôme de degré n qui admet $(n+1)$ racines est le polynôme nul.

Un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.

Identification des fonctions polynomiales.

V) Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Lemme 1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

Lemme 2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, si a est une racine complexe non réelle de P de multiplicité m , alors $\bar{a}$ est aussi une racine de P , de même multiplicité m .

Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On l'obtient à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les facteurs correspondant à 2 racines complexes conjuguées non réelles.

VI) Somme et produit des racines d'un polynôme

Expressions de la somme et du produit des racines (d'un polynôme scindé, comptées avec multiplicité) en fonction de ses coefficients.

▲ Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Chapitre 22. Espaces vectoriels de dimension finie.

Voir résumé de cours.

I) Compléments sur familles libres, génératrices, bases

II) Espaces vectoriels de dimension finie

III) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.

▲ **Ne sont pas au programme cette prochaine :**

Matrices d'applications linéaires ;

Applications linéaires et rang ;

Noyau, image et rang d'une matrice.