

Programme de colle semaine 21 - du 18/03 au 22/03

Questions de cours

- Donner les critères à vérifier pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.
- Soit $f \in F^E$. Donner la propriété à vérifier pour que f soit une application linéaire, démontrer que $f(0_E) = 0_F$.
- Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Donner les critères à vérifier pour que F et G soient supplémentaires.
- Toute question proche du cours.

Chapitre 19. Espaces vectoriels.

I) Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition.

Exemples \mathbb{K}^n , \mathbb{K}^Ω , E^Ω où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathbb{R}^I , $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est un \mathbb{K}^{np} écrit comme un tableau et non horizontalement. \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, c'est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel. Produit $E \times F$ de deux sous-espaces vectoriels.

Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.

II) Sous-espaces vectoriels

Définition, caractérisation par : $F \subset E$; $F \neq \emptyset$; $\forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Stabilité par combinaison linéaire.

Exemples. $\{O_E\}$, E , droites et plans. Les espaces $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, les fonctions paires, impaires, les matrices triangulaires supérieures, diagonales, symétriques, antisymétriques. Les suites convergentes (ie admettant une limite finie, réelle). Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, d'une équation différentielle linéaire homogène.

Intersection (quelconque) de sous-espaces vectoriels $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Sous-espace engendré par une partie $X \subset E$. C'est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant X . C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient X . Même définition pour une famille X .

▲ Pour cette année en PTSI, on peut se restreindre dans la suite à une partie finie $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Il est cependant intéressant de comprendre que les fonctions polynomiales sans borne sur leur degré est le Vect d'une partie infinie.

Pour $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, définition de $\text{Vect}(X)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de x_1, \dots, x_n . C'est le sous-espace vectoriel engendré par X .

On obtient une autre technique pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, en le décrivant comme un Vect.

Exemples. Trouver une équation de plan de l'espace décrit comme $\text{Vect}((2, 0, 1), (1, -1, 0))$ de deux vecteurs non colinéaires, en éliminant (a, b) dans $\exists (a, b) \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = a(2, 0, 1) + b(1, -1, 0)$.

Les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 sur \mathbb{R} ,

$$F = \{x \mapsto ax^2 + bx + c ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$$

Brève extension à une partie quelconque X , $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini x_1, \dots, x_n d'éléments de X . C'est le sous-espace vectoriel engendré par X .

Exemples. Les fonctions polynomiales sur \mathbb{R} sont $F = \text{Vect}(x \mapsto x^k; k \in \mathbb{N})$.

Le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(x \mapsto \cos(kx); x \mapsto \sin(kx); k \in \mathbb{N})$.

Il contient les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \sin^n(x)$, on obtient une décomposition en les linéarisant.

III) Applications linéaires

Applications linéaires. Une application $f \in F^E$ est dite linéaire lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Dans ce cas, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Notation $\mathcal{L}(E, F)$. C'est un espace vectoriel, c est un sous-espace vectoriel de F^E .

Exemples.

Dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

L'identité id_E , les homothéties $\lambda \text{id}_E, \lambda \in \mathbb{K}^*$.

La transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La dérivation sur les fonctions dérivables.

Pour $a \in I$, la prise de la primitive s'annulant en a ; $f \mapsto \left[x \mapsto \int_a^x f(t) dt \right]$.

L'intégrale sur les fonctions continues sur I est linéaire. Pour $a, b \in I, f \mapsto \int_a^b f(t) dt$.

L'évaluation d'une fonction en a .

La prise de la limite d'une suite convergente.

$X \mapsto AX$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, entre les bons espaces.

$y \mapsto y' + a(x)y$ entre les fonctions de classe \mathcal{C}^1 et les fonctions continues.

Vocabulaire.

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E . Notation $\mathcal{L}(E)$.

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans \mathbb{K} .

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Notation $\text{Gl}(E)$.

Proposition. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, ie est linéaire.

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'application $\varphi: \begin{cases} \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ g \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

Pour $g \in \mathcal{L}(F, G)$, l'application $\psi: \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ f \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Conséquence. On dispose des propriétés signifiant que $\text{Gl}(E)$ est un groupe, non abélien en général.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

En particulier, l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Noyau, notation $\ker(f)$ ou $\text{Ker}(f)$. C'est un sous-espace vectoriel.

Conséquence. On peut montrer que F est un sous-espace vectoriel en le décrivant comme un noyau, ou une intersection de noyaux. Cela ne dispense pas de montrer la linéarité des application linéaires invoquées.

IV) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Somme directe. Caractérisation par l'intersection.

Sous-espaces supplémentaires.

Exemples.

Dans \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 .

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Les fonctions paires et les fonctions impaires sont supplémentaires dans \mathbb{R}^I (où I est symétrique par rapport à 0).

Pour $a \in I$, Les fonctions s'annulant en a et les fonctions constantes $\text{Vect}(1)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^I .

V) Familles finies.

Familles libres, liées, génératrices, bases. Vecteurs linéairement indépendants.

Exemples de différentes techniques pour montrer la liberté d'une famille.

Bases canoniques de \mathbb{K}^n et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

▲ L'objectif principal de ce paragraphe est d'étudier la liberté d'une famille finie. Les coordonnées dans une base feront l'objet d'un chapitre ultérieur.

▲ L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'a pas encore été défini. On peut néanmoins se placer dans celui des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.