

Programme de colle semaine 20 - du 11/03 au 15/03

Questions de cours

- Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
 - 1) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
 - 2) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
 - 1) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
 - 2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Soient $n, k, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq k \leq n$. En utilisant une interprétation ensembliste, montrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p} = 2^{n-p} \binom{n}{p}$$

- Calculer un nombre d'anagrammes sur un exemple.
- Donner les critères à vérifier pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.
- Soit $f \in F^E$. Donner la propriété à vérifier pour que f soit une application linéaire, démontrer que $f(0_E) = 0_F$.

Chapitre 17. Ensembles et applications.

I) Ensembles

Appartenance, inclusion, égalité de deux ensembles.

Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.

Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E .

Partie A d'un ensemble E vérifiant une condition, une propriété $\mathcal{P}(x)$ dont la valeur de vérité dépend de $x \in E$. Notation $A = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. Application au paradoxe de Russel.

Partie A d'un ensemble E définie comme l'image d'une fonction à valeurs dans E .

Exemples $f(I) = \{f(x) ; x \in \mathbb{R}\}$ où $f : I \longrightarrow \mathbb{R} ; \mathbb{U} = \{e^{it} ; t \in \mathbb{R}\}$.

Opérations sur les parties d'un ensemble.

Réunion $A \cup B$, intersection $A \cap B$, complémentaire $E \setminus A = \mathcal{C}_A^E = \overline{A}$,

différence symétrique $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (« ou exclusif »).

Lien entre connecteurs logiques (et, ou, non) et opérations ensemblistes.

Propriétés.

$$A \cup B = B \cup A ;$$

$$A \cap B = B \cap A ;$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C ;$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ;$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} ;$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} ;$$

Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles $\prod_{i=1}^n E_i = E_1 \times \cdots \times E_n$.

II) Applications

1) Application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F ; graphe d'une application.

Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E pour l'ensemble des applications de E dans F .

Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble d'indices I .

C'est une application de I dans E . Notation $(x_i)_{i \in I}$.

Cas $I = \mathbb{N}$; notation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est une suite d'éléments de E .

Cas $I = \llbracket 1 ; n \rrbracket$; notation $(x_1, \dots, x_n)$, c'est un n -uplet d'éléments de E .

2) Exemples classiques.

Application id_E .

Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E . Notation 1_A . Lien avec les opérations sur les ensembles.

Projections canoniques $p_1: \begin{cases} E \times F \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x \end{cases}$; $p_2: \begin{cases} E \times F \longrightarrow F \\ (x, y) \longmapsto y \end{cases}$; $p_i: \begin{cases} \prod_{j=1}^n E_j \longrightarrow E_i \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i \end{cases}$.

3) Restriction. Notation $f|_A$ pour $A \subset E$ et $f \in F^E$.

Prolongement d'une application. On dit que g est un prolongement de f lorsque f est une restriction de g .

4) Image directe. Notation $f(A)$. Image d'une fonction $\text{Im}(f) = f(E)$.

5) Image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$.

6) Composition. Propriété $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

III) Injections, surjections, bijections

Définition pour $f \in F^E$.

Exemples. L'identité, les projections canoniques, l'injection canonique $i: \begin{cases} A \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$ pour $A \subset E$.

On peut construire une injection $j: \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ x \longmapsto \{x\} \end{cases}$. Une application $f: \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ n'est jamais

surjective, la partie $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ n'étant pas atteinte.

Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.

Réciproque.

Définition, notation f^{-1} . C'est une bijection, vérifiant $(f^{-1})^{-1} = f$; $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$; $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$.

Proposition. Si $h \in E^F$ vérifie $h \circ f = \text{id}_E$; $f \circ h = \text{id}_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = h$.

Réciproque de la composée de deux applications bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Si f est bijective et $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$: l'image réciproque de B par f est l'image directe de B par f^{-1} .

Involution. Définition (vocabulaire), exemples.

IV) Relations

Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité.

Relation d'équivalence.

▲ La notion d'ensemble quotient est hors programme.

▲ Définition d'une relation d'ordre, mais hors programme.

Exemples de relations.

L'inclusion $A \subset B$ dans $\mathcal{P}(E)$.

La divisibilité dans $\mathbb{N}$. $d|n \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad n = kd$.

La divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

La congruence modulo α dans $\mathbb{R}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, notamment $\alpha = 2\pi$. $x = y[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = y + k\alpha$.

La congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$. $k \equiv k' \pmod{n} \iff n|(k - k') \iff \exists p \in \mathbb{Z} \quad k = k' + np$.

Chapitre 18. Ensembles finis et dénombrement.

I) Ensembles finis

Définition. Un ensemble est dit fini lorsqu'il est vide ou en bijection avec un ensemble $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Cardinal d'un ensemble fini. Notations $\text{Card}(A)$, $|A|$, $\#A$.

Proposition. Si $f \in F^E$ est une application bijective avec E fini, alors F est fini de même cardinal.

▲ L'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme, mais c'est parfois utile de préciser celles-ci.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Proposition. Soit $f \in F^E$.

Si E est fini et f est surjective, alors F est fini et $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.

Si F est fini et f est injective, alors E est fini et $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.

Si E et F sont finis de même cardinal, alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Application du premier point au principe des tiroirs.

II) Cardinaux, dénombrement

1) Opérations sur les cardinaux

Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, complémentaire, produit cartésien. Union disjointe d'un nombre fini d'ensembles finis.

▲ La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments d'un ensemble de cardinal n ; c'est n^p .

2) Arrangements et injections

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n , c'est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Un arrangement de p éléments de F est une p -liste d'éléments de F deux à deux distincts, ie $(x_1, \dots, x_p) \in F$ tels que $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; p \rrbracket^2$, $x_i \neq x_j$.

3) Permutations et bijections

Proposition. Si E et F sont des ensembles finis de même cardinal n , alors le nombre de bijections de E dans F est $A_n^n = n!$.

Une permutation d'un ensemble E de cardinal n est un arrangement de n éléments de E , ie une bijection de E dans E .

Nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ; c'est $n!$.

C'est aussi le nombre de façons d'ordonner E .

4) Parties d'un ensemble et combinaisons

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble fini de cardinal n .

Exemples.

Nombre d'anagrammes d'un mot.

Nombre de façons de choisir, parmi n joueurs disponibles, une équipe de k joueurs, dont p titulaires.

Exemples de techniques de double comptage (question de cours).

Démonstrations combinatoires des formules de Pascal et du binôme.

▲ Les étudiants doivent savoir distinguer les situations et utiliser les outils correspondants. Situations additives, multiplicatives, identiques, injectives, avec ordre, sans ordre...

Chapitre 19. Espaces vectoriels.

I) Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition.

Exemples $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$, E^Ω où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathbb{R}^I$, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}^{np}$ écrit comme un tableau et non horizontalement. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Si E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, c'est aussi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Produit $E \times F$ de deux sous-espaces vectoriels.

Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.

II) Sous-espaces vectoriels

Définition, caractérisation par : $F \subset E$; $F \neq \emptyset$; $\forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Stabilité par combinaison linéaire.

Exemples. $\{O_E\}$, E , droites et plans. Les espaces $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, les fonctions paires, impaires, les matrices triangulaires supérieures, diagonales, symétriques, antisymétriques. Les suites convergentes (ie admettant une limite finie, réelle). Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, d'une équation différentielle linéaire homogène.

Intersection (quelconque) de sous-espaces vectoriels $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Sous-espace engendré par une partie $X \subset E$. C'est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant X . C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient X . Même définition pour une famille X .

▲ Pour cette année en PTSI, on peut se restreindre dans la suite à une partie finie $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Il est cependant intéressant de comprendre que les fonctions polynomiales sans borne sur leur degré est le Vect d'une partie infinie.

Pour $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, définition de $\text{Vect}(X)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par X .

On obtient une autre technique pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, en le décrivant comme un Vect.

Exemples. Trouver une équation de plan de l'espace décrit comme $\text{Vect}((2, 0, 1), (1, -1, 0))$ de deux vecteurs non colinéaires, en éliminant (a, b) dans $\exists (a, b) \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = a(2, 0, 1) + b(1, -1, 0)$.

Les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 sur $\mathbb{R}$,

$$F = \{x \mapsto ax^2 + bx + c ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$$

Brève extension à une partie quelconque X , $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de X . C'est le sous-espace vectoriel engendré par X .

Exemples. Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ sont $F = \text{Vect}(x \mapsto x^k ; k \in \mathbb{N})$.

Le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect} (x \mapsto \cos(kx); x \mapsto \sin(kx) ; k \in \mathbb{N})$.
 Il contient les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \sin^n(x)$, on obtient une décomposition en les linéarisant.

III) Applications linéaires

Applications linéaires. Une application $f \in F^E$ est dite linéaire lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Dans ce cas, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Notation $\mathcal{L}(E, F)$. C'est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de F^E .

Exemples.

Dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

L'identité id_E , les homothéties $\lambda \text{id}_E, \lambda \in \mathbb{K}^*$.

La transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La dérivation sur les fonctions dérivables.

Pour $a \in I$, la prise de la primitive s'annulant en a ; $f \mapsto \left[x \mapsto \int_a^x f(t) dt \right]$.

L'intégrale sur les fonctions continues sur I est linéaire. Pour $a, b \in I, f \mapsto \int_a^b f(t) dt$.

L'évaluation d'une fonction en a .

La prise de la limite d'une suite convergente.

$X \mapsto AX$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, entre les bons espaces.

$y \mapsto y' + a(x)y$ entre les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et les fonctions continues.

Vocabulaire.

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E . Notation $\mathcal{L}(E)$.

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Notation $\text{Gl}(E)$.

Proposition. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, ie est linéaire.

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'application $\varphi: \begin{cases} \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ g \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

Pour $g \in \mathcal{L}(F, G)$, l'application $\psi: \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ f \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est linéaire.

La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Conséquence. On dispose des propriétés signifiant que $\text{Gl}(E)$ est un groupe, non abélien en général.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

En particulier, l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Noyau, notation $\ker(f)$ ou $\text{Ker}(f)$. C'est un sous-espace vectoriel.

Conséquence. On peut montrer que F est un sous-espace vectoriel en le décrivant comme un noyau, ou une intersection de noyaux. Cela ne dispense pas de montrer la linéarité des application linéaires invoquées.

▲ Pas de somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires, familles libres, liées, génératrices cette semaine.

▲ L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'a pas encore été défini. On peut néanmoins se placer dans celui des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.