Programme de colle semaine 18 - du 11/02 au 15/02

Questions de cours

- Définir une rotation plane de centre Ω et d'angle θ : $r(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, où M' est défini par $\Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) = \theta$ pour $\mathrm{M} \neq \Omega$. Illustrer par un dessin.
Traduction avec les nombres complexes :
donner et expliquer les conditions à vérifier sur f: $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' \end{cases}$ pour que cette application soit la rotation de centre Ω et d'angle θ : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z' - \omega| = |z - \omega|$ et si $z \neq \omega$, $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta$.
On obtient $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.
- Définir une homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $h(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, où M' est défini par $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = k\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$. Illustrer par un dessin.
Traduction avec les nombres complexes :
donner et expliquer les conditions à vérifier sur f: $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' \end{cases}$ pour que cette application soit l'homothétie de centre Ω et de rapport k : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z' - \omega = k(z - \omega)$.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis (3 versions).
- Énoncer le théorème de limite de la dérivée.
- Énoncer la formule de Leibniz (produit de fonctions n fois dérivables).

Chapitre 15. Nombres complexes (2).

Reprise du chapitre.
1) Racines n^{es} de l'unité.
2) Racines n^{es} de $\mathrm{A} \in \mathbb{C}$.

3) Applications géométriques des nombres complexes
Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.
Transformation $z \longmapsto z + b$; interprétation en termes de translation.
Transformation $z \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$; rotation plane de centre O et d'angle θ.
Transformation $z \longmapsto kz$ où $k \in \mathbb{R}^*$; homothétie de centre O et de rapport k.
Transformation $z \longmapsto \overline{z}$; interprétation en termes de symétrie axiale.
Exemples de rotations et d'homothéties dont le centre n'est pas O.
Méthode : changer O en Ω d'affixe ω et considérer le vecteur $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$ d'affixe $z - \omega$.

Chapitre 16. Dérivation.

I) Compléments sur les propriétés locales
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a,

ie $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$ avec $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
Notion de dérivabilité à droite, à gauche en a.

II) Compléments sur les fonctions dérivables [global]
Cadre. $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, à valeurs réelles, et $a \in \mathrm{I}$.

1) Extrema
Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, où a est un point intérieur à I (ie pas une extrémité), alors $f'(a) = 0$.

2) Théorème de Rolle
Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

3) Égalité / Théorème des accroissements finis
Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors $\exists c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Corollaire. Inégalités des accroissements finis (1).
Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in\,]\,a\,;b\,[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$.

4) Fonction k-lipschitzienne.
Définition (valable pour les fonctions à valeurs complexes).
Si f est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.
Si f est k-lipschitzienne et dérivable sur I, alors $|f'| \leqslant k$.

5) Inégalités des accroissements finis (2)
Si f est dérivable sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

Pour les fonctions à valeurs complexes (admis dans ce chapitre) :
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

6) Application - exercice.
Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : [\,a\,;b\,] \longrightarrow [\,a\,;b\,]$ est k-contractante.

7) Preuve du lien entre le signe de f' et les variations de f sur I.
f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
f est strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle de longueur strictement positive.

8) Théorème de limite de la dérivée
Si f est continue sur I, dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, et $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,
alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a, x \neq a]{} \ell$.
En particulier, sous ces hypothèses, f est dérivable en a si et seulement si $\ell \in \mathbb{R}$ et dans ce cas $f'(a) = \ell$.

Il existe des fonctions dérivables où la dérivée n'est pas continue, comme $x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.

III) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Définition. Notations $\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathbb{C})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{C})$.

Propriétés. Ces ensembles sont stables pour les opérations $f+g, \lambda f$, $f\times g$, $\dfrac{f}{g}$, composées $g\circ f$, réciproques, lorsque la dérivée de la réciproque à un sens.

Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Chapitre 17. Ensembles et applications.

I) Ensembles

Appartenance, inclusion, égalité de deux ensembles.

Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.

Ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties d'un ensemble E.

Partie A d'un ensemble E vérifiant une condition, une propriété $\mathscr{P}(x)$ dont la valeur de vérité dépend de $x \in \mathrm{E}$. Notation $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid \mathscr{P}(x)\}$. Application au paradoxe de Russel.

Partie A d'un ensemble E définie comme l'image d'une fonction à valeurs dans E.

Exemples $f(\mathrm{I}) = \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ où $f\ :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{it}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$.

Opérations sur les parties d'un ensemble.

Réunion $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, intersection $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, complémentaire $\mathrm{E}\setminus\mathrm{A} = \complement_{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}} = \overline{\mathrm{A}}$,
différence symétrique $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}) = (\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\setminus(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ (« ou exclusif »).

Lien entre connecteurs logiques (et, ou, non) et opérations ensemblistes.

Propriétés.

$\mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \mathrm{B}\cup\mathrm{A}$;
$\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \mathrm{B}\cap\mathrm{A}$;
$\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cup\mathrm{C}$;
$\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap\mathrm{C}$;
$\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$;
$\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$;
$\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$;
$\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}$;

Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i = \mathrm{E}_1\times\cdots\times\mathrm{E}_n$.