Programme de colle semaine 17 - du 04/02 au 08/02

Questions de cours

- Énoncer la définition : formule des coefficients d'un produit de matrices.
- Méthode de résolution d'une suite arithmérico-géométrique.
- Décrire la méthode de résolution d'une relation sur les suites (R) : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où $a, b \in \mathbb{C}$. Forme (générale) des solutions à valeurs complexes ; à valeurs réelles lorsque $a, b \in \mathbb{R}$.
- Définir une rotation plane de centre Ω et d'angle θ : $r(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, où M' est défini par $\Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) = \theta$ pour $\mathrm{M} \neq \Omega$. Illustrer par un dessin.
  Traduction avec les nombres complexes :
  donner et expliquer les conditions à vérifier sur f : $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' \end{cases}$ pour que cette application soit la rotation de centre Ω et d'angle θ : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z' - \omega| = |z - \omega|$ et si $z \neq \omega$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta$.
  On obtient $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.
- Définir une homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $h(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, où M' est défini par $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = k\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$. Illustrer par un dessin.
  Traduction avec les nombres complexes :
  donner et expliquer les conditions à vérifier sur f : $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' \end{cases}$ pour que cette application soit l'homothétie de centre Ω et de rapport k : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z' - \omega = k(z - \omega)$.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis (3 versions).

Chapitre 14. Suites.

Reprise du chapitre.
9) Compléments sur borne inférieure et supérieure.
Caractérisation de sup(A) parmi les majorants comme limite d'une suite d'éléments de A.

10) Suites à valeurs complexes.
Convergence d'une suite complexe. Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire. Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.

Exemples du cours. Convergence et limite de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$; divergence vers $+\infty$ de $(|q^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $|q| > 1$; cas $q = 1$ et $q = -1$.
Convergence et limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ pour $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$.

11) Étude de suites particulières.
1) Suites arithmético-géométriques.
Calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

2) Suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

Résolution de (R) : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où $a, b \in \mathbb{C}$. Équation caractéristique. Forme (générale) des solutions à valeurs complexes ; à valeurs réelles lorsque $a, b \in \mathbb{R}$.

Calcul du terme général lorsque $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ sont donnés.

3) Exemples d'étude de suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Chapitre 15. Nombres complexes (2).

1) Racines n^{es} de l'unité.

2) Racines n^{es} de $\mathrm{A} \in \mathbb{C}$.

3) Applications géométriques des nombres complexes

Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.

Transformation $z \longmapsto z + b$; interprétation en termes de translation.

Transformation $z \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$; rotation plane de centre O et d'angle θ.

Transformation $z \longmapsto kz$ où $k \in \mathbb{R}^*$; homothétie de centre O et de rapport k.

Transformation $z \longmapsto \overline{z}$; interprétation en termes de symétrie axiale.

Exemples de rotations et d'homothéties dont le centre n'est pas O.

Méthode : changer O en Ω d'affixe ω et considérer le vecteur $\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}$ d'affixe $z - \omega$.

Chapitre 16. Dérivation.

I) Compléments sur les propriétés locales

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a,
ie $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$ avec $\varepsilon(x - a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Notion de dérivabilité à droite, à gauche en a.

II) Compléments sur les fonctions dérivables [global]

Cadre. $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, à valeurs réelles, et $a \in \mathrm{I}$.

1) Extrema

Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, où a est un point intérieur à I (ie pas une extrémité), alors $f'(a) = 0$.

2) Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

3) Égalité / Théorème des accroissements finis

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors $\exists c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Corollaire. Inégalités des accroissements finis (1).

Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, et $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \,]\,a\,;b\,[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$, alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b - a)$.

4) Fonction k-lipschitzienne.

Définition (valable pour les fonctions à valeurs complexes).

Si f est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Si f est k-lipschitzienne et dérivable sur I, alors $|f'| \leqslant k$.

5) Inégalités des accroissements finis (2)
Si f est dérivable sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

Pour les fonctions à valeurs complexes (admis dans ce chapitre) :
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$, alors f est M-lipschitzienne sur I.

6) Application - exercice.
Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f\ :\ [\,a\,;b\,] \longrightarrow [\,a\,;b\,]$ est k-contractante.

7) Preuve du lien entre le signe de f' et les variations de f sur I.
f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
f est strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle de longueur strictement positive.

▲ Suite du chapitre la semaine prochaine : Théorème de limite de la dérivée ;
Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$; Formule de Leibniz.