Programme de colle semaine 15 - du 21/01 au 25/01

Questions de cours

- Énoncer la formule du binôme pour les matrices en précisant les hypothèses.
- Énoncer le théorème de convergence par encadrement pour les suites et les théorèmes de divergence par majoration ou minoration.
- Énoncer le théorème de convergence monotone pour les suites.
- Définir ce que sont des suites adjacentes et énoncer le théorème correspondant.

Chapitre 13. Calcul matriciel.

1) Ensembles de matrices : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Opérations sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: combinaisons linéaires.

Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$ est un groupe abélien, que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3) Produit de matrices

Définitions, exemples. Attention à la compatibilité des tailles. AB et BA n'ont pas la même taille en général. On peut avoir $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$. On peut avoir $\mathrm{AB} = 0$ avec $\mathrm{A} \neq 0$ et $\mathrm{B} \neq 0$.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Écriture matricielle $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ d'un système linéaire de matrice augmentée $(\mathrm{A}|\mathrm{B})$.

La j^{e} colonne de AB est le produit de A par la j^{e} colonne de B.

La i^{e} ligne de AB est le produit de la i^{e} ligne de A par B.

Propriétés. $\mathrm{A} \times 0 = 0$; $0 \times \mathrm{A} = 0$; associativité et bilinéarité du produit.

4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent. Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_{n}(\mathbb{K}); +; \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$.

5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition : A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche (admis).

Propriété $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$. Ensemble $\mathrm{G}l_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n, appelé groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{K}$. Propriétés signifiant que $(\mathrm{G}l_n(\mathbb{K}); \times)$ est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de $\mathrm{A}^2 - 8\mathrm{A} + \mathrm{I}_2 = 0$.

6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations $+$, $\cdot$, $\times$ des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

7) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires. Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $\mathrm{EA} = \mathrm{R}$. Application au calcul effectif de l'inverse de A lorsque A est de rang n (maximal).

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne de coefficients $x_1, \ldots, x_n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}_n$ (ie A est de rang n)

(iii) Le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que le solution nulle.

(iv) $\forall \mathrm{B} \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.

(v) $\forall \mathrm{B} \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.

Critère pour déterminer si A est inversible, et dans ce cas, calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

8) Transposition

Définition de ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}^\mathrm{T}$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Propriétés. ${}^t(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda\, {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B}$; ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\, {}^t\mathrm{A}$ lorsque compatible ; $\left({}^t\mathrm{A}\right)^{-1} = {}^t(\mathrm{A}^{-1})$ lorsque A est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.

Chapitre 14. Suites.

1) Modes de définition.

Explicitement, implicitement, par récurrence.

▲ Uniquement des suites à valeurs réelles cette semaine.

2) Limites

Suites convergentes, suites tendant vers $+\infty$, $-\infty$.

3) Suites extraites

Utilisation pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite.

4) Suite majorée minorée, bornée

Toute suite convergente est bornée.

5) Opérations et limites.

Somme, multiplication par un réel. [combinaison linéaire]

Produit, inverse, quotient.

Composition d'une suite tendant vers a par une fonction admettant une limite en a.

6) Inégalités et limites.

Passage à la limite dans une inégalité large. Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

7) Monotonie.

Caractérisation pour les suites. Théorème de la limite monotone : convergence ou limite infinie.

Exemples du cours. Convergence de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; divergence de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

8) Suites adjacentes.

Définition et théorème.

▲ Le reste du chapitre à partir de la semaine prochaine.