

## Programme de colle semaine 14 - du 14/01 au 18/01

### Questions de cours

- Tous les équivalents usuels. Une erreur sur un équivalent usuel, une application d'une formule ailleurs qu'au bon voisinage, une somme ou une composition d'équivalents entraîne une note inférieure à 9.
- Définir une matrice échelonnée, une matrice échelonnée réduite. Illustrer par un schéma.
- Donner les opérations élémentaires sur les lignes à effectuer pour passer d'une matrice échelonnée dont les pivots  $a_{i,j_i}$  sont égaux à 1, pour  $1 \leq i \leq r$ , à une matrice échelonnée réduite. On notera  $n$  le nombre de lignes et  $p$  le nombre de colonnes.
- Énoncer la formule du binôme pour les matrices en précisant les hypothèses.

### Chapitre 12. Systèmes linéaires.

#### 1) Vocabulaire

Cadre :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , appelés scalaires.  $n, p \in \mathbb{N}$ .

Équation linéaire à  $p$  inconnues. Système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues. Interprétations géométriques dans le plan et dans l'espace. Système homogène associé à un système linéaire. Matrice  $A$  d'un système linéaire ; matrice augmentée  $(A|B)$  où  $B$  est la colonne des seconds membres. Les matrices sont des tableaux rectangulaires de nombres appartenant à  $\mathbb{K}$ . Expression des solutions d'un système linéaire. Description des solutions au moyen d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.

#### 2) Opérations élémentaires sur les lignes

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice.

Transposition : échange de deux lignes, notée  $L_i \longleftrightarrow L_k$ .

Dilatation : multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, notée  $L_i \longleftarrow \lambda L_i$  où  $\lambda \neq 0$ .

Transvection : ajout à une ligne le produit d'une autre ligne par un scalaire, notée  $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_k$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Deux systèmes  $(S)$  et  $(S')$ , ou deux matrices  $A$  et  $A'$ , sont dits équivalents par lignes si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note  $A \sim_L A'$ .

Deux systèmes  $(S)$  et  $(S')$  sont équivalents par lignes si et seulement si leur matrice augmentée associée sont équivalentes par lignes.

Autrement dit, si l'on passe d'un système  $(S)$  à un autre système  $(S')$  par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de  $(S')$  s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de  $(S)$ .

Deux systèmes sont équivalents par lignes sont équivalents (d'un point de vue logique), ils ont alors le même ensemble de solutions.

#### 3) Échelonnement.

Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i). Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
- (ii). À partir de la deuxième ligne, chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente.

Autrement dit, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé plus à droite que le premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Pour une ligne non nulle  $L_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p})$ , on note  $j_i = \min \{j \in \llbracket 1; p \rrbracket \mid a_{i,j} \neq 0\}$  l'indice du premier élément non nul.

La deuxième condition s'écrit  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ , où  $L_1, \dots, L_r$  sont les  $r$  premières lignes, celles non nulles, et on a  $r \leq \min(n; p)$ .

Schéma « en escalier » pour illustrer la notion de matrice échelonnée.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Rang d'une matrice échelonnée par lignes. On a  $r \leq \min(n; p)$ .

Inconnues principales (en nombre  $r$ ), inconnues secondaires ou paramètres (en nombre  $p - r$ ). Relations de compatibilité (en nombre  $n - r$ ). Système compatible. Système incompatible.

Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

4) Algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Théorème. Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée par lignes.

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

(unicité non prouvée).

Le rang d'un système linéaire est le nombre de pivots de la matrice réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associé.

5) Nombre de solutions

Trois cas particuliers :  $r = n$  ;  $r = p$  ;  $r = n = p$  (système de Cramer).

## Chapitre 13. Calcul matriciel.

1) Ensembles de matrices :  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

2) Opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  : combinaisons linéaires.

Propriétés signifiant que  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$  est un groupe abélien, que  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

3) Produit de matrices

Définitions, exemples. Attention à la compatibilité des tailles.  $AB$  et  $BA$  n'ont pas la même taille en général. On peut avoir  $AB \neq BA$ . On peut avoir  $AB = 0$  avec  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ .

Si  $X$  est une matrice colonne,  $AX$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . Écriture matricielle  $AX = B$  d'un système linéaire de matrice augmentée  $(A|B)$ .

La  $j^{\text{e}}$  colonne de  $AB$  est le produit de  $A$  par la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $B$ .

La  $i^{\text{e}}$  ligne de  $AB$  est le produit de la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A$  par  $B$ .

Propriétés.  $A \times 0 = 0$  ;  $0 \times A = 0$  ; associativité et bilinéarité du produit.

4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent. Propriétés signifiant que  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}); +; \times)$  est un anneau, non commutatif dès que  $n \geq 2$ .

5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition :  $A$  est inversible si et seulement si  $A$  est inversible à droite si et seulement si  $A$  est inversible à gauche (admis).

Propriété  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Ensemble  $GL_n(\mathbb{K})$  des matrices inversibles d'ordre  $n$ , appelé groupe linéaire d'ordre  $n$  de  $\mathbb{K}$ . Propriétés signifiant que  $(GL_n(\mathbb{K}); \times)$  est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de  $A^2 - 8A + I_2 = 0$ .

6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\times$  des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

### 7) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires. Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire  $A$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , il existe une matrice  $E$  produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite  $R$  telles que  $EA = R$ . Application au calcul effectif de l'inverse de  $A$  lorsque  $A$  est de rang  $n$  (maximal).

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  le vecteur colonne de coefficients  $x_1, \dots, x_n$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est inversible.
- (ii)  $A \sim I_n$  (ie  $A$  est de rang  $n$ )
- (iii) Le système  $AX = 0$  n'admet que le solution nulle.
- (iv)  $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $AX = B$  admet une unique solution.
- (v)  $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $AX = B$  admet au moins une solution.

Critère pour déterminer si  $A$  est inversible, et dans ce cas, calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

### 8) Transposition

Définition de  ${}^tA = A^T$  pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Propriétés.  ${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB$  ;  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  lorsque compatible ;  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$  lorsque  $A$  est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.