Programme de colle semaine 13 - du 07/01 au 11/01

Questions de cours

- Tous les équivalents usuels. Une erreur sur un équivalent usuel, une application d'une formule ailleurs qu'au bon voisinage, une somme ou une composition d'équivalents entraîne une note inférieure à 9.
- Plan d'étude de recherche d'asymptote pour une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Définir une matrice échelonnée, une matrice échelonnée réduite. Illustrer par un schéma.
- Donner les opérations élémentaires sur les lignes à effectuer pour passer d'une matrice échelonnée dont les pivots a_{i,j_i} sont égaux à 1, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, à une matrice échelonnée réduite. On notera n le nombre de lignes et p le nombre de colonnes.

Chapitre 11. Continuité.

Reprise du chapitre.

II) Équivalents de fonctions : relation $\sim$.
Voir résumé de cours.
Propriétés usuelles découlant des limites : constantes non nulles, produit, quotient, puissance α.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.
Équivalents usuels.
Application au calcul de limites et étude de signes.
Application à la recherche d'asymptote oblique : vocabulaire branche parabolique d'une direction donnée.

III) Continuité sur un intervalle (étude « globale »)
Définition. Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composée $g \circ f$ de f continue sur I et de g continue sur $f(\mathrm{I})$.
Théorème des valeurs intermédiaires : énoncé et corollaire équivalent : l'image par f continue de I intervalle est un intervalle.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (théorème admis).
L'image d'un segment par une fonction continue sur celui-ci est un segment. Les autres formes d'intervalles ne sont pas conservées en général.

Chapitre 12. Systèmes linéaires.

1) Vocabulaire
Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, appelés scalaires. $n, p \in \mathbb{N}$.
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues. Interprétations géométriques dans le plan et dans l'espace. Système homogène associé à un système linéaire. Matrice A d'un système linéaire ; matrice augmentée (A|B) où B est la colonne des seconds membres. Les matrices sont des tableaux rectangulaires de nombres appartenant à $\mathbb{K}$. Expression des solutions d'un système linéaire. Description des solutions au moyen d'une solution particulière et des solutions du

système homogène associé.

2) Opérations élémentaires sur les lignes

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice.

Transposition : échange de deux lignes, notée $\mathrm{L}_i \longleftrightarrow \mathrm{L}_k$.

Dilatation : multiplication d'une ligne par un scalaire non nul,notée $\mathrm{L}_i \longleftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ où $\lambda \neq 0$.

Transvection : ajout à une ligne le produit d'une autre ligne par un scalaire, notée $\mathrm{L}_i \longleftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_k$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Deux systèmes (S) et (S′), ou deux matrices A et A′, sont dits équivalents par lignes si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{A}'$.

Deux systèmes (S) et (S′) sont équivalents par lignes si et seulement si leur matrice augmentée associée sont équivalentes par lignes.

Autrement dit, si l'on passe d'un système (S) à un autre système (S′) par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de (S′) s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de (S).

Deux systèmes sont équivalents par lignes sont équivalents (d'un point de vue logique), ils ont alors le même ensemble de solutions.

3) Échelonnement.

Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i). Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

(ii). À partir de la deuxième ligne, chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente.

Autrement dit, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé plus à droite que le premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Pour une ligne non nulle $\mathrm{L}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p})$, on note $j_i = \min \{ j \in [\![1 ; p]\!] \mid a_{i,j} \neq 0 \}$ l'indice du premier élément non nul.

La deuxième condition s'écrit $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, où $\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_r$ sont les r premières lignes, celles non nulles, et on a $r \leqslant \min(n; p)$.

Schéma « en escalier » pour illustrer la notion de matrice échelonnée.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Rang d'une matrice échelonnée par lignes. On a $r \leqslant \min(n; p)$.

Inconnues principales (en nombre r), inconnues secondaires ou paramètres (en nombre $p - r$). Relations de compatibilité (en nombre $n - r$). Système compatible. Système incompatible.

Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

4) Algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Théorème. Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée par lignes.

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes. (unicité non prouvée).

Le rang d'un système linéaire est le nombre de pivots de la matrice réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associé.

5) Nombre de solutions

Trois cas particuliers : $r = n$; $r = p$; $r = n = p$ (système de Cramer).