

Programme de colle semaine 12 - du 17/12 au 21/12

Questions de cours

- Énoncer la définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pour $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec des quantificateurs (un cas parmi neuf).
- Tous les équivalents usuels. Une erreur sur un équivalent usuel, une application d'une formule ailleurs qu'au bon voisinage, une somme ou une composition d'équivalents entraîne une note inférieure à 9.
- Plan d'étude de recherche d'asymptote pour une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Chapitre 10. Nombres réels (2).

1) Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

Pour A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, l'ensemble des majorants de A est de la forme $[M_0; +\infty[$. On note $M_0 = \sup(A)$ le plus petit (minimum) des majorants.

Si A admet un maximum, alors $\max(A) = \sup(A)$.

Exemples du cours.

$A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$; $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ partie de $\mathbb{Q}$ bornée, sans bornes supérieure ni inférieure dans $\mathbb{Q}$.

2) Partie entière d'un réel

Définition. Unique entier k tel que $k \leq x < k+1$, ie $x \in [k; k+1[$. Notation $[x]$ ou $E(x)$.

Exemples du cours. Courbe et 1-périodicité de la fonction $x \mapsto x - [x]$.

Courbe de la fonction $x \mapsto [x]$.

3) Approximation décimale d'un réel.

Définition. Voir exercice 3.

Chapitre 11. Continuité.

I) Étude locale : limites.

Cadre : f est une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Propriété vraie au voisinage de a , pour $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

1) Limites

Définitions : pour $a \in I$ ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a . Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ (9 cas).

Unicité de la limite.

Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, à gauche, pour une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. Notation $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = b$.

2) Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a (somme, produit par un réel, produit, quotient). Composition. Limite d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a .

3) Inégalités et limites.

Stabilité des inégalités large par passage à la limite.

Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$) et de majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

4) Continuité en a .

Continuité de f en un $a \in I$. Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues en a : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composition $g \circ f$ de f continue en a et de g continue en $f(a)$.

II) Équivalents de fonctions : relation $\sim$.

Voir résumé de cours.

Propriétés usuelles découlant des limites : constantes non nulles, produit, quotient, puissance α .

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Équivalents usuels.

Application au calcul de limites et étude de signes.

Application à la recherche d'asymptote oblique : vocabulaire branche parabolique d'une direction donnée.

III) Continuité sur un intervalle (étude « globale »)

Définition. Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composée $g \circ f$ de f continue sur I et de g continue sur $f(I)$.

Théorème des valeurs intermédiaires : énoncé et corollaire équivalent : l'image par f continue de I intervalle est un intervalle.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (théorème admis).

L'image d'un segment par une fonction continue sur celui-ci est un segment. Les autres formes d'intervalles ne sont pas conservées en général.