Programme de colle semaine 11 - du 10/12 au 14/12

Questions de cours

- Énoncer la forme des solutions générales à valeurs complexes de $y'' + ay' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{C}$ et énoncer la forme des solutions générales à valeurs réelles lorsque $a, b \in \mathbb{R}$.
- Énoncer la forme $\varphi(x)$ sous laquelle chercher une solution particulière φ d'une EDL2 à coefficients constants de la forme $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{\lambda x}$ où $a, b, \lambda \in \mathbb{C}$.
- Énoncer la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ pour $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec des quantificateurs (un cas parmi neuf).

Chapitre 9. Équations différentielles.

I) Équations différentielles linéaires d'ordre 1.
Reprise du paragraphe.

II) Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
1) Vocabulaire. Définition. Solution. Équation homogène associée.
2) Résolution de (E_0). Équation caractéristique. Solutions à valeurs complexes. Solutions à valeurs réelles lorsque l'EDL2 est à coefficients réels.
3) Forme générale des solutions d'une EDL2 à coefficients constants avec second membre.
4) Recherche d'une solution particulière.
Principe de superposition des solutions.
Cas des seconds membres de la forme $\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. En conséquence, tous les seconds membres qui s'écrivent comme combinaison linéaire de $\mathrm{e}^{\lambda x}$.
Pour une EDL2 à coefficients réels, on peut trouver une solution particulière associée à un second membre égal à $\cos(x)$ en prenant la partie réelle d'une solution particulière associée à e^{ix}, plutôt que de faire l'autre calcul avec e^{-ix} (et généralisation avec d'autres seconds membres).

▲ Aucune règle n'est à connaître pour les seconds membres de la forme $\mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ et leurs variantes.

5) Problème de Cauchy. Définition. Existence et unicité de la solution (admis dans le cas général), méthode pour la trouver en résolvant un système 2-2 (2 équations, 2 inconnues).

Chapitre 10. Nombres réels (2).

1) Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.
Pour A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, l'ensemble des majorants de A est de la forme $[\,\mathrm{M}_0\,; +\infty\,[$. On note $\mathrm{M}_0 = \sup(\mathrm{A})$ le plus petit (minimum) des majorants.
Si A admet un maximum, alors $\max(\mathrm{A}) = \sup(\mathrm{A})$.

Exemples du cours.
$\mathrm{A} = \left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$; $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} = \,]-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,[$; $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ partie de $\mathbb{Q}$ bornée, sans bornes supérieure ni inférieure dans $\mathbb{Q}$.

2) Partie entière d'un réel

Définition. Unique entier k tel que $k \leqslant x < x+1$, ie $x \in [\, k\,; k+1\, [$. Notation $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x)$.

Exemples du cours. Courbe et 1-périodicité de la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.
Courbe de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

3) Approximation décimale d'un réel.

Définition. Voir exercice 3.

Chapitre 11. Continuité.

I) Étude locale : limites.

Cadre : f est une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Propriété vraie au voisinage de a, pour $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

1) Limites

Définitions : pour $a \in \mathrm{I}$ ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a. Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ (9 cas).

Unicité de la limite.

Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Limite à droite, à gauche, pour une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$. Notation $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = b$.

2) Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a (somme, produit par un réel, produit, quotient). Composition. Limite d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a.

3) Inégalités et limites.

Stabilité des inégalités large par passage à la limite.

Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$) et de majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

4) Continuité en a.

Continuité de f en un $a \in \mathrm{I}$. Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en a lorsque f est définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues en a : combinaisons linéaires, produit, quotient. Composition $g \circ f$ de f continue en a et de g continue en $f(a)$.