Programme de colle semaine 8 - du 19/11 au 23/11

Questions de cours

- Dérivation de Arcsin avec démonstration (existence sur un intervalle à préciser et formule de $\text{Arcsin}'(x)$, avec la formule de dérivation d'une réciproque).
- Dérivation de Arctan avec démonstration (existence sur un intervalle à préciser et formule de $\text{Arctan}'(x)$, avec la formule de dérivation d'une réciproque).
- Simplifier $\text{Arcsin}\,(x) + \text{Arccos}\,(x)$ pour x à préciser.
- Simplifier $\text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour x à préciser.
- Calculer une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Au choix, en complexifiant, ou bien par une double intégration par parties.
- Énoncer le théorème d'intégration par parties (avec ses hypothèses) pour calculer une primitive ou une intégrale tel qu'il est dans le cours. Sans démonstration. Énoncer la définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I un intervalle.

Chapitre 7. Fonctions (2).

1) Bijection et réciproque

Définition d'une bijection. Condition suffisante. Fonction réciproque, propriétés. Monotonie. Symétrie des courbes. Dérivation ponctuelle, sur un intervalle.

Exemples du cours. Bijectivité de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$; ln et exp ; fonctions carré et racine carré sur $[\,0\,;+\infty\,[$; cube et racine cubique sur $\mathbb{R}$ (prolonge sur $\mathbb{R}$ la fonction puissance un tiers) ; $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

▲ Les fonctions $\sqrt[n]{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_-$ pour n impair ne sont pas au programme de PTSI. Il est cependant intéressant d'en avoir rencontré comme exemple ou exercice.

2) Fonctions circulaires réciproques

Arcsin, Arccos, Arctan. Ensembles de définition et d'arrivée, de dérivabilité, dérivée, courbe.

Exemples du cours. $\text{Arcsin}\,(x) + \text{Arccos}\,(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x \in [\,-1\,;1\,]$.

$\text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$ et $= -\dfrac{\pi}{2}$ pour $x < 0$.

3) Dérivées d'ordre supérieur.

Interprétation géométrique du signe de f''.

▲ Le vocabulaire convexe, concave, point d'inflexion est hors programme.

4) Fonctions à valeurs complexes.

Dérivation de $f :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f' = a + \mathrm{i}b$ où $f = a + \mathrm{i}b$ avec a et b à valeurs réelles.

Cas particulier d'une fonction affine complexe.

Dérivation de e^{φ}. C'est $(\mathrm{e}^{\varphi})' = \varphi'\mathrm{e}^{\varphi}$ où $\varphi :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et où exp est la fonction exponentielle complexe.

▲ Pas de dérivation de fonctions $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ autres que dans le cas ci-dessus.

Cas particuliers $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$; $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Chapitre 8. Primitives.

1) Intégrales - outils pour la Physique et la SII
Subdivision d'un segment. Subdivision régulière.
Idée de construction d'une intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Aucune démonstration technique.

Notations $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$; $\displaystyle\int_a^b f$; $\displaystyle\int_{[\,a\,;b\,]} f$
▲ Les fonctions continues par morceaux sont hors programme.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.
Inégalité « triangulaire » : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$
Relation de Chasles. Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Théorème. L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle, ie
Si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, positive sur $[\,a\,;b\,]$, et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$ sur $[\,a\,;b\,]$.

2) Primitives.
Définition. Forme des primitives sur un intervalle quand on en connaît une. Existence pour une fonction continue sur un intervalle, comme intégrale fonction de la borne supérieure.

3) Primitives usuelles.
Reconnaître des fonctions dérivées, y compris des fonctions composées.
Application au calcul d'intégrales.

4) Théorème d'intégration par parties.
Version pour le calcul de primitives, version pour le calcul d'intégrales.

▲ Pas de changement de variable cette semaine.