Programme de colle semaine 7 - du 12/11 au 16/11

Questions de cours

- Énoncer la formule du binôme de Newton et la factorisation de $a^n - b^n$.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.
- Dérivation de Arcsin avec démonstration (existence sur un intervalle à préciser et formule de $\mathrm{Arcsin}'(x)$, avec la formule de dérivation d'une réciproque).
- Dérivation de Arctan avec démonstration (existence sur un intervalle à préciser et formule de $\mathrm{Arctan}'(x)$, avec la formule de dérivation d'une réciproque).
- Simplifier $\mathrm{Arcsin}\,(x) + \mathrm{Arccos}\,(x)$ pour x à préciser.
- Simplifier $\mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour x à préciser.

Chapitre 6. Calculs algébriques.

1) Signes somme et produit. Factorielle.

2) Coefficients binomiaux. Formule de Pascal.

3) Techniques de calculs
Exemples de changement d'indices, de sommes et produits télescopiques (principe des dominos).
Exemples du cours : calculs et interprétation géométrique
de $\sum_{k=1}^{n} k$, de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en calculant $\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$ de deux façons ; $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

4) Formules classiques
Formule du binôme de Newton.
Applications à linéariser ($\cos^4(x)$...), à développer, à reconnaître pour factoriser.
Factorisation de $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
Sommes arithmétiques.
Sommes géométriques.

Exemples fondamentaux. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exemples de sommes doubles, de changements d'indices dans une somme double dans des cas « simples » : sommation sur un rectangle de $\mathbb{N}^2$, un triangle, éventuellement une union de ceux-ci.

Exemples du cours. Calcul de $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2(i+j)$; de $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \min(i,j)$.

Calcul de $\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \binom{n}{k}$ avec interversion de k et n.
Développement d'une somme au carré

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} {a_k}^2 + 2 \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j = \sum_{k=0}^{n} {a_k}^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j$$

Notation $\sum_{(i,j) \in \mathrm{A}} u_{i,j}$ où A est une partie de $\mathbb{N}^2$; interversion des indices i et j dans $\sum_{i=0}^{5} \sum_{j=2i}^{n+2i} u_{i,j}$.

5) Généralisation à n termes des formules des chapitres précédents.

Chapitre 7. Fonctions (2).

1) Bijection et réciproque

Définition d'une bijection. Condition suffisante. Fonction réciproque, propriétés. Monotonie. Symétrie des courbes. Dérivation ponctuelle, sur un intervalle.

Exemples du cours. Bijectivité de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$; ln et exp ; fonctions carré et racine carré sur $[\,0\,;+\infty\,[$; cube et racine cubique sur $\mathbb{R}$ (prolonge sur $\mathbb{R}$ la fonction puissance un tiers) ; $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

▲ Les fonctions $\sqrt[n]{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_-$ pour n impair ne sont pas au programme de PTSI. Il est cependant intéressant d'en avoir rencontré comme exemple ou exercice.

2) Fonctions circulaires réciproques

Arcsin, Arccos, Arctan. Ensembles de définition et d'arrivée, de dérivabilité, dérivée, courbe.

Exemples du cours. $\mathrm{Arcsin}\,(x) + \mathrm{Arccos}\,(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x \in [\,-1\,;1\,]$.

$\mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$ et $= -\dfrac{\pi}{2}$ pour $x < 0$.

3) Dérivées d'ordre supérieur.

Interprétation géométrique du signe de f''.

▲ Le vocabulaire convexe, concave, point d'inflexion est hors programme.

4) Fonctions à valeurs complexes.

Dérivation de $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f' = a + \mathrm{i}b$ où $f = a + \mathrm{i}b$ avec a et b à valeurs réelles.

Cas particulier d'une fonction affine complexe.

Dérivation de e^{φ}. C'est $(\mathrm{e}^{\varphi})' = \varphi'\mathrm{e}^{\varphi}$ où $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et où exp est la fonction exponentielle complexe.

▲ Pas de dérivation de fonctions $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ autres que dans le cas ci-dessus.

Cas particuliers $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$; $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.