Programme de colle semaines 27 et 28 - du 22/05 au 01/06

Questions de cours

- Une notion quelconque proche du cours.

Chapitre 24. Espaces vectoriels de dimension finie.

Ensemble du chapitre.
I) Compléments sur familles libres, génératrices, bases
II) Espaces vectoriels de dimension finie
III) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie
IV) Applications linéaires et matrices
V) Applications linéaires et rang
VI) Noyau, image et rang d'une matrice
Rappel : application linéaire canoniquement associée à une matrice.
Image et noyau d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation en termes de systèmes linéaires.
Rang d'une matrice A. Le rang d'une matrice est défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire canoniquement associée à A.
Théorème du rang.
Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.
Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.
Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.
Proposition. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, il existe P et Q inversibles telles que $\mathrm{A} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{J}_r\mathrm{P}$, où J_r est décrite par blocs : $\mathrm{J}_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Rang de la transposée. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice.