Programme de colle semaines 25 et 26 - du 30/04 au 18/05

Questions de cours

- Énoncer la caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires propre à la dimension finie.
- Une notion quelconque proche du cours.

Chapitre 24. Espaces vectoriels de dimension finie.

I) Compléments sur familles libres, génératrices, bases
Définition. Une famille $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est dite de degrés échelonnés lorsque $\deg(\mathrm{P}_0) < \cdots < \deg(\mathrm{P}_n)$.

Proposition. Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.

Définition. La base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n) = (\mathrm{X}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Elle a $(n+1)$ éléments.

Coordonnées d'une vecteur dans une base. Matrice colonne des coordonnées.
Lemme.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et f est injective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice et f est surjective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice.
En particulier, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base, alors pour toute application linéaire f, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

II) Espaces vectoriels de dimension finie
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.
Tout espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E de dimension finie peut être complétée en une base. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.
Dimension. Droites et plans vectoriels.
Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E est de dimension n, les familles libres ont au plus n éléments, les familles génératrices ont au moins n éléments.
Si E est de dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
Rang d'une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension quelconque.
Caractérisation des familles finies libres par le rang.

III) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales, ie

$$F = E \iff \begin{cases} F \text{ sous-espace vectoriel de } E \\ \dim(F) = \dim(E) \end{cases}$$

Dimension de la somme de deux sous-espaces (formule de Grassmann). Cas particulier d'une somme directe.

Supplémentaires d'un sous-espace : existence, dimension commune. Caractérisation

$$E = F \oplus G \iff 2 \text{ propriétés parmi les 3 suivantes sont vraies : } \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Dans ce cas, les trois sont vraies.

Base adaptée à une inclusion, à une somme directe.

▲ **La semaine prochaine seulement :**

IV) Applications linéaires et matrices

V) Applications linéaires et rang

VI) Noyau, image et rang d'une matrice