Programme de colle semaines 24 et 25 - du 23/04 au 04/05

Questions de cours

- Énoncer la proposition de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$;
  puis montrer que $P(a) = 0 \iff (X - a)|P$.
- Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes, puis montrer que pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, $(X - a)^2|P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.

Chapitre 23. Polynômes.

I) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Construction possible comme les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ s'annulant à partir d'un certain rang, ie comportant un nombre fini de termes non nuls.

Pour P non nul, on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$, et $X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

Le degré de P est n.

Par convention, on pose $\deg(0) = -\infty$.

Le coefficient dominant est a_n.

Le terme de plus haut degré (dominant) est $a_n X^n$.

P est dit unitaire lorsque $a_n = 1$, ie $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.

Opérations. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

Combinaison linéaire $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda a_k + b_k)X^k$.

On a $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si et seulement si $\deg(P) \neq \deg(P)$ ou $a_n \neq b_n$, ie tous les cas hors ceux où la somme des termes dominant s'annule, $(a_n + b_n)X^n = 0$.

Produit $PQ = R = \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell X^\ell$ avec $c_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}$.

On a $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$.

Composition $Q \circ P = Q(P) = \sum_{k=0}^{m} b_k P^k$ où $P^0 = 1$ et P^k est le produit $P \times P \times \cdots P$, k fois, défini par récurrence sur k.

On a $\deg(Q(P)) = nm = \deg(P) \times \deg(Q)$.

On a $Q(X) = Q$ et le produit est cohérent avec la notation X^k.

Évaluation d'un polynôme.

Dans $\mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$, où $M^0 = I_p$.

Dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$, où $f^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ...
La multiplication des polynômes est envoyée sur la composition des endomorphismes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition. $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ en est un sous-espace vectoriel.

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, la fonction $\widetilde{\mathrm{P}}\colon \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$, encore notée P, est la fonction polynomiale associée à P. Ce n'est pas une application linéaire en général (comparer avec l'évaluation ci-dessous).

Les évaluations sont des applications linéaires, ie

Pour $x \in \mathbb{K}$ fixé, $\varphi_x\colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$ est une forme linéaire,

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ fixée, $\varphi_{\mathrm{M}}\colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{M}^k \end{cases}$ est linéaire,

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ fixé, $\varphi_f\colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \end{cases}$ est linéaire.

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ fixé, la composition à gauche $\mathrm{P}\colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{Q}(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} \circ \mathrm{P} \end{cases}$ est linéaire.

▲ La semaine prochaine seulement, étude de familles $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ de polynômes de degrés échelonnés et base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

II) Dérivation dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

Dérivation dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, on pose $\mathrm{P}' = \sum_{k=1}^{n} a_k k \mathrm{X}^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)\mathrm{X}^k$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, la fonction dérivée de la fonction polynomiale associée à P est la fonction polynomiale associée au polynôme dérivé de P, ie $\left(\widetilde{\mathrm{P}}\right)' = \widetilde{(\mathrm{P}')}$,
ie la dérivée de $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}$.

La dérivation est linéaire, ie $\mathrm{D}\colon \begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}' \end{cases}$ est linéaire.

Pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on a $(\mathrm{PQ})' = \mathrm{P}'\mathrm{Q} + \mathrm{P}\mathrm{Q}'$, ainsi que la formule de Leibniz qui en découle.
La dérivée k^{e} d'un polynôme peut-être définie par récurrence. On pose $\mathrm{P}^{(0)} = \mathrm{P}$, et $\mathrm{P}^{(k+1)} = \left(\mathrm{P}^{(k)}\right)'$.
On obtient, pour $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$, $\mathrm{P}^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k)!} \mathrm{X}^{i-k}$ si $k \leqslant n$, et $\mathrm{P}^{(k)} = 0$ si $k \geqslant n+1$.
Formule de Leibniz.
Formule de Taylor. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$, on a $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X} - a)^k$.

III) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition et théorème. Méthode pratique pour obtenir le quotient et le reste. Exemples de méthodes pour obtenir seulement le reste.

IV) Racines (ou zéros) d'un polynôme.

Caractérisation par la divisibilité.

Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.

Multiplicité d'une racine. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que a est racine de P de multiplicité (ou d'ordre) m lorsque $(X-a)^m | P$ et $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.

Vocabulaire racine simple, double, ...

Caractérisation par les dérivées successives. a est racine de P de multiplicité m si et seulement si $\forall k \in [\![0\,;\, m-1]\!] \quad P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Le nombre de racines comptées avec multiplicité d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.

Définition d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, d'un polynôme scindé à racines simples.

Proposition. Un polynôme de degré n qui admet $(n+1)$ racines est le polynôme nul.

Un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.

Identification des fonctions polynomiales.

V) Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Lemme 1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

Lemme 2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, si a est une racine complexe non réelle de P de multiplicité m, alors $\overline{a}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité m.

Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On l'obtient à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les facteurs correspondant à 2 racines complexes conjuguées non réelles.

VI) Somme et produit des racines d'un polynôme

Expressions de la somme et du produit des racines (d'un polynôme scindé, comptées avec multiplicité) en fonction de ses coefficients.

▲ Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.