Programme de colle semaines 23 et 24 - du 03/04 au 27/04

Questions de cours

- Énoncé d'un DL usuel à l'ordre n au voisinage de 0.
- Énoncer la formule de Taylor-Young et en déduire le DL au voisinage de 0 de $(1+x)^\alpha$ ou de e^x.

Chapitre 21. Espaces vectoriels.

Reprise de l'ensemble du chapitre.

Chapitre 22. Analyse asymptotique.

Reprise du programme précédent.

II) Développements limités.
Développement limité à l'ordre n de f au voisinage de a.
Unicité, troncature d'un développement limité.
Forme normalisée d'un développement limité : $f(a+h) = h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p}) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$
Équivalence $f(a+h) \sim a_p h^p$.
Signe de f au voisinage de a.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.
Exemples simples de développements limités d'une fonction composée.
Intégration d'un développement limité.
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point a de I d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

Exemple de fonction admettant un DL d'ordre 2 au voisinage de 0 mais qui n'est pas dérivable 2 fois en 0.
DL usuels (voir fiche).

III) Applications des développements limités
Exemples de recherche d'équivalents, de limites, de signe, de prolongement par continuité et dérivabilité de celui-ci, de position d'une courbe par rapport à une tangente.
Étude simple de branches infinies : recherche d'asymptote (droite $y = ax + b$) pour une fonction qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$ en recherchant un DL de $\dfrac{f(x)}{x}$ de la forme $a + \dfrac{b}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Méthode et vocabulaire « branches paraboliques de directions $(\mathrm{O}y)$, $(\mathrm{O}x)$, $y = ax$ » lorsqu'on obtient des cas intéressants lors de la recherche :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ ou } -\infty\,;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = +\infty \text{ ou } -\infty.$$