Programme de colle semaines 18 et 19 - du 26/02 au 09/03

Questions de cours

- Soient $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$.
  1) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
  2) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Soient $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$.
  1) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
  2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Chapitre 17. Dérivation.

Reprise du programme précédent.

Chapitre 18. Ensembles et applications.

I) Ensembles
Appartenance, inclusion, égalité de deux ensembles.
Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.
Ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties d'un ensemble E.
Partie A d'un ensemble E vérifiant une condition, une propriété $\mathscr{P}(x)$ dont la valeur de vérité dépend de $x \in \mathrm{E}$. Notation $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid \mathscr{P}(x)\}$. Application au paradoxe de Russel.
Partie A d'un ensemble E définie comme l'image d'une fonction à valeurs dans E.
Exemples $f(\mathrm{I}) = \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ où $f\ :\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{it}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$.

Opérations sur les parties d'un ensemble.
Réunion $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, intersection $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, complémentaire $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = \complement_{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}} = \overline{\mathrm{A}}$,
différence symétrique $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (« ou exclusif »).
Lien entre connecteurs logiques (et, ou, non) et opérations ensemblistes.

Propriétés.
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$;
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$;
$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$;
$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$;
$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$;
$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$;
$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$;
$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$;
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i = \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$.

II) Applications

1) Application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F ; graphe d'une application.
Notations $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et F^{E} pour l'ensemble des applications de E dans F.
Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble d'indices I.
C'est une application de I dans E. Notation $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.
Cas $\mathrm{I}=\mathbb{N}$; notation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est une suite d'éléments de E.
Cas $\mathrm{I}=[\![1\,;\,n]\!]$; notation $(x_1,\ldots,x_n)$, c'est un n-uplet d'éléments de E.

2) Exemples classiques.
Application id_{E}.
Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E. Notation $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$. Lien avec les opérations sur les ensembles.
Projections canoniques $p_1\colon \begin{cases}\mathrm{E}\times\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}\\ (x,y) \longmapsto x\end{cases}$; $p_2\colon \begin{cases}\mathrm{E}\times\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}\\ (x,y) \longmapsto y\end{cases}$; $p_i\colon \begin{cases}\prod\limits_{j=1}^{n}\mathrm{E}_j \longrightarrow \mathrm{E}_i\\ (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto x_i\end{cases}$.

3) Restriction. Notation $f_{|\mathrm{A}}$ pour $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$ et $f\in\mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.
Prolongement d'une application. On dit que g est un prolongement de f lorsque f est une restriction de g.

4) Image directe. Notation $f(\mathrm{A})$. Image d'une fonction $\mathrm{Im}(f)=f(\mathrm{E})$.

5) Image réciproque. Notation $f^{-1}(\mathrm{B})$.

6) Composition. Propriété $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

III) Injections, surjections, bijections

Définition pour $f\in\mathrm{F}^{\mathrm{E}}$.
Exemples. L'identité, les projections canoniques, l'injection canonique $i\colon \begin{cases}\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{E}\\ x \longmapsto x\end{cases}$ pour $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$.
On peut construire une injection $j\colon \begin{cases}\mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{E})\\ x \longmapsto \{x\}\end{cases}$. Une application $f\colon \begin{cases}\mathrm{E} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{E})\\ x \longmapsto f(x)\end{cases}$ n'est jamais surjective, la partie $\mathrm{A}=\{x\in\mathrm{E}\mid x\notin f(x)\}$ n'étant pas atteinte.
Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.
Réciproque.
Définition, notation f^{-1}. C'est une bijection, vérifiant $(f^{-1})^{-1}=f$; $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$; $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.
Proposition. Si $h\in\mathrm{E}^{\mathrm{F}}$ vérifie $h\circ f=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$; $f\circ h=\mathrm{id}_{\mathrm{F}}$, alors f est bijective et $f^{-1}=h$.
Réciproque de la composée de deux applications bijectives, $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.
Si f est bijective et $\mathrm{B}\subset\mathrm{F}$, alors $f^{-1}(\mathrm{B})=f^{-1}(\mathrm{B})$: l'image réciproque de B par f est l'image directe de B par f^{-1}.
Involution. Définition (vocabulaire), exemples.

IV) Relations

Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité.
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.
▲ La notion d'ensemble quotient est hors programme.
▲ Définition d'une relation d'ordre, d'un ordre total, mais hors programme.
Exemples de relations.
L'inclusion $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.
La divisibilité dans $\mathbb{N}$. $d|n \iff \exists k\in\mathbb{N}\quad n=kd$.
La divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
La congruence modulo α dans $\mathbb{R}$ où $\alpha\in\mathbb{R}^*$, notamment $\alpha=2\pi$. $x=y[\alpha] \iff \exists k\in\mathbb{Z}\quad x=y+k\alpha$.
La congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$. $k\equiv k' \mod n \iff n|(k-k') \iff \exists p\in\mathbb{Z}\quad k=k'+np$.