

Programme de colle semaines 17 et 18 - du 05/02 au 02/03

Questions de cours

- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis (3 versions).

Chapitre 16. Calcul matriciel.

Reprise du programme précédent.

Chapitre 17. Dérivation.

I) Compléments sur les propriétés locales

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Si f est dérivable en a , alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a , ie $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$ avec $\varepsilon(x - a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Notion de dérivabilité à droite, à gauche en a .

II) Compléments sur les fonctions dérivables [global]

Cadre. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, à valeurs réelles, et $a \in I$.

1) Extrema

Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a , où a est un point intérieur à I (ie pas une extrémité), alors $f'(a) = 0$.

2) Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, et $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3) Égalité / Théorème des accroissements finis

Si f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, alors $\exists c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Corollaire. Inégalités des accroissements finis (1).

Si f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, et $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

4) Fonction k -lipschitzienne.

Définition (valable pour les fonctions à valeurs complexes).

Si f est k -lipschitzienne sur I , alors f est continue sur I .

Si f est k -lipschitzienne et dérivable sur I , alors $|f'| \leq k$.

5) Inégalités des accroissements finis (2)

Si f est dérivable sur I , et $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leq M$, alors f est M -lipschitzienne sur I .

Pour les fonctions à valeurs complexes (admis dans ce chapitre) :

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leq M$, alors f est M -lipschitzienne sur I .

6) Application - exercice.

Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : [a; b] \longrightarrow [a; b]$ est k -contractante.

7) Preuve du lien entre le signe de f' et les variations de f sur I .

f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.

f est strictement croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle de longueur strictement positive.

8) Théorème de limite de la dérivée

Si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a, x \neq a} \ell$.

En particulier, sous ces hypothèses, f est dérivable en a si et seulement si $\ell \in \mathbb{R}$ et dans ce cas $f'(a) = \ell$.

Il existe des fonctions dérivables où la dérivée n'est pas continue, comme $x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.

III) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition. Notations $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$.

Propriétés. Ces ensembles sont stables pour les opérations $f + g$, λf , $f \times g$, $\frac{f}{g}$, composées $g \circ f$, réciproques, lorsque la dérivée de la réciproque à un sens.

Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$