Programme de colle semaines 16 et 17 - du 29/01 au 09/02

Questions de cours

- Énoncer la formule du binôme pour les matrices en précisant les hypothèses.

Chapitre 15. Nombres complexes (2).

Reprise du programme précédent.

Chapitre 16. Calcul matriciel.

Reprise du programme précédent.

4) Matrices carrées

Matrice identité. Puissances d'une matrices carrée, formule du binôme pour des matrices qui commutent. Propriétés signifiant que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$.

5) Matrices carrées inversibles, inverse.

Proposition : A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche (admis).

Propriété $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$. Ensemble $\mathrm{G}l_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n, appelé groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{K}$. Propriétés signifiant que $(\mathrm{G}l_n(\mathbb{K}); \times)$ est un groupe.

Exemple de calcul d'inverse dans le cas où l'on dispose de $\mathrm{A}^2 - 8\mathrm{A} + \mathrm{I}_2 = 0$.

6) Matrices diagonales et triangulaires

Stabilité par les opérations $+$, $\cdot$, $\times$ des ensembles : - des matrices diagonales ; - des matrices triangulaires supérieures ; - des matrices triangulaires inférieures

Produit et puissance terme à terme pour les matrices diagonales. Pour les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures.

7) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires. Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $\mathrm{A} = \mathrm{ER}$. Application au calcul effectif de l'inverse de A lorsque A est de rang n (maximal).

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne de coefficients $x_1, \ldots, x_n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}_n$ (ie A est de rang n)

(iii) Le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que le solution nulle.

(iv) $\forall \mathrm{B} \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.

(v) $\forall \mathrm{B} \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.

Critère pour déterminer si A est inversible, et dans ce cas, calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

8) Transposition

Définition de ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}^\mathrm{T}$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Propriétés. ${}^t(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda\,{}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B}$; ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$ lorsque compatible ; ${}^t(\mathrm{A}^{-1}) = {}^t(\mathrm{A}^{-1})$ lorsque A est inversible. Matrices symétriques et antisymétriques.